

STEUER- UND REGELUNGSTECHNIK

Professor Dr.-Ing. Ferdinand Svaricek

Institut für Steuer- und Regelungstechnik
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Universität der Bundeswehr München

Vorwort

Diese Arbeitsblätter beschreiben den wesentlichen Inhalt der Lehrveranstaltung "Steuer- und Regelungstechnik", (V 2, SÜ 2), für Studentinnen und Studenten des Bachelor-Studiengangs Luft- und Raumfahrttechnik an der *Universität der Bundeswehr München* ab dem WT 2013. Diese Lehrveranstaltung ist Bestandteil des BA-Moduls "Mess- und Regelungstechnik" und beginnt jedes Studienjahr jeweils im Wintersemester. Als Startzeitpunkt ist das Wintersemester im 3. Studienjahr vorgesehen. Für leistungstarke Studierende besteht im Rahmen des Intensivstudiums die Möglichkeit, das Modul individuell bereits im Wintersemester des 2. Studienjahr zu beginnen.

Mit dieser als Studienbegleittext zu Vorlesung und Übung verfaßten Schrift soll einmal die für die Fachprüfung verlangte Stoffauswahl abgegrenzt und zum anderen den Studentinnen und Studenten die Mitschrift erleichtert werden. Darüber hinaus sind wichtige mathematische Grundlagen zur Wiederholung und zum Nachschlagen im Anhang zusammengestellt.

Diese Studienhilfe ersetzt kein Lehrbuch, das zum Selbststudium geeignet wäre, vielmehr sind zum Verständnis des Stoffes Erläuterungen und Beispiele der Vorlesungsveranstaltungen sowie die aktive Mitarbeit bei den Übungen notwendig. Für die Nacharbeit und die Prüfungsvorbereitung sind die in der Literaturzusammenstellung genannten Bücher geeignet.

Allen Mitarbeitern des Instituts für Steuer- und Regelungstechnik die bei den Lehrveranstaltungen mitwirken, möchte ich für die Unterstützung herzlich danken.

Neubiberg, im Januar 2013

F. Svaricek

Inhaltsverzeichnis

Literatur	4
Formelzeichen	5
Symbole elektrischer, mechanischer und fluidtechnischer Bauelemente	7
1 Einführung	11
1.1 Einordnung der Regelungstechnik	11
1.2 Historische Entwicklung der Regelungstechnik	12
1.3 Bezeichnungen und Definitionen	18
1.4 Systembeschreibung mittels Blockschaltbildern	20
1.5 Das statische Kennlinienfeld	23
1.6 Steuerung und Regelung	24
1.7 Lösungsweg für Regelungsaufgaben	27
2 Modellbildung dynamischer Systeme	29
2.1 Einleitung	29
2.2 Linearisierung nichtlinearer Systeme	29
2.3 Testsignale der Regelungstechnik	34
2.4 Das Faltungsintegral	39
2.5 Beschreibung durch Differentialgleichungen	40
2.5.1 Dynamische Systeme 1. Ordnung	41
2.5.2 Systeme zweiter Ordnung	45
2.5.3 Proportionalübertragungssysteme höherer Ordnung	51
2.5.4 Systeme ohne Ausgleich — I-Glieder —	56
2.5.5 Zusammenfassung zu den Differentialgleichungen dynamischer Systeme	59
2.6 Beschreibung im Bildbereich	62
2.6.1 Anwendung der Laplace-Transformation in der Regelungstechnik	63
2.6.2 Definition und Eigenschaften der Übertragungsfunktion	68
2.6.3 Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion	69
2.6.4 Berechnung der Ausgangsgröße mit Hilfe der Übertragungsfunktion	71
2.7 Eigenschaften wichtiger Übertragungsglieder	72
2.8 Zusammenfassung zur Beschreibung dynamischer Systeme im Bildbereich	83
3 Analyse des Regelkreises	84
3.1 Modell des Standardregelkreises	84
3.2 Stationäres Verhalten des Regelkreises	86
3.2.1 Stationäres Verhalten bei sprungförmiger Erregung	87
3.2.2 Stationäres Verhalten bei rampenförmiger Erregung	88
3.3 Stabilität dynamischer Systeme	89

3.4	Algebraische Stabilitätskriterien	93
3.4.1	Das Hurwitz–Kriterium	93
3.4.2	Das Routh–Kriterium	94
3.5	Stabilitätsprüfung anhand der charakteristischen Gleichung des geschlossenen Regelkreises	95
4	Entwurf linearer Regelkreise	98
4.1	Einleitung	98
4.2	Gütemaße im Zeitbereich	100
4.3	Integralkriterien	101
4.4	Einstellung eines PID–Reglers nach Ziegler–Nichols	104
	Anhang	108
A	Mathematische Grundlagen	108
A.1	Komplexe Zahlen und Funktionen	108
A.2	Polynome und rationale Funktionen	111
A.3	Residuensatz	112
A.4	Partialbruchzerlegung	114
A.5	Laplace–Transformation	118
A.5.1	Eigenschaften und Tabellen der Laplace–Transformation	119
	Stichwortverzeichnis	128

Literatur

- Föllinger, O.** 1985. *Regelungstechnik*. Heidelberg: Hüthig.
- Frey, T.** und **M. Bossert.** 2004. *Signal- und Systemtheorie*. Stuttgart: B.G. Teubner.
- Litz, L.** 2005. *Automatisierungstechnik: Regelungssysteme – Steuerungssysteme – Hybride Systeme*. München: Oldenbourg Verlag.
- Lunze, J.** 2005. *Regelungstechnik 1. Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen*. Berlin: Springer-Verlag. (5. Auflage).
- Lunze, J.** 2003. *Automatisierungstechnik*. München: Oldenbourg Verlag.
- Schulz, G.** 2004. *Regelungstechnik 1*. München: Oldenbourg Verlag (2. Auflage).
- Girod, B., R. Rabenstein** und **A. Stenger.** 2003. *Einführung in die Systemtheorie*. Stuttgart: B.G. Teubner. (2. Auflage)
- Unbehauen, H.** 2000. *Regelungstechnik. Band I*. Braunschweig: Vieweg und Sohn (10. Auflage).
- Unbehauen, R.** 2002. *Systemtheorie 1*. München: Oldenbourg Verlag (8. Auflage).

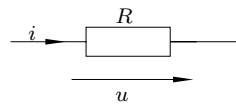
Formelzeichen

A	Fläche
\mathbf{A}	$n \times n$ Systemmatrix
a_i	Polynomkoeffizienten (insbesondere Nennerpolynome)
b_i	Polynomkoeffizienten (insbesondere Zählerpolynome)
\mathbf{b}	$n \times 1$ Eingangsmatrix
c	Federkonstante
C	Kapazität
$C(s)$	charakteristisches Polynom
\mathbf{c}^T	$1 \times n$ Ausgangsmatrix
d	Dämpfungs-konstante
D	Dämpfungsgrad
e	Basis der natürlichen Logarithmen
$e(t)$	Regelabweichung, Regelfehler
$f(t)$	allgemeine Zeitfunktion
F	Kraft
$g(t)$	Gewichtsfunktion
$G(s), F(s)$	Übertragungsfunktion
$G_0(s)$	Übertragungsfunktion des offenen Systems
$G_w(s)$	Führungsübertragungsfunktion
$G_z(s)$	Störübertragungsfunktion
$h(t)$	Übergangsfunktion (Einheitssprungantwort)
i, j	Indizes
I	Trägheitsmoment
j	$=\sqrt{-1}$, imaginäre Einheit
K_D	Beiwert des D -Anteils eines Reglers
K_I	Beiwert des I -Anteils eines Reglers
K	Beiwert des P -Anteils eines Reglers
K_S	Systemverstärkung
L	Induktivität
$L\{\cdot\}$	Linearer Operator, angewendet auf \cdot
n	Grad des charakteristischen Polynoms, Systemordnung
n_i	Nullstellen der Übertragungsfunktion
$N(s)$	Nennerpolynom der Übertragungsfunktion
m	Masse, Grad des Zählerpolynoms der Übertragungsfunktion
p	Druck
p_i	Pole der Übertragungsfunktion
q	Volumenstrom
R	Widerstand
$r(t)$	Meßrauschen
R_i	Residuen der Partialbruchzerlegung

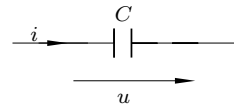
$R(s)$	Laplace transformierte des Meßrauschens
s	Laplacevariable
$S(s)$	Empfindlichkeitsfunktion
t	Zeit (allgemein)
t_0	Anfangszeit
T	Zeitkonstante
T_I	Integralzeit, Integrationszeitkonstante, Nachstellzeit (PI-Regler)
T_D	Differentialzeit, Vorhaltezeit (PD-Regler)
T_t	Totzeit
$T(s)$	komplementäre Empfindlichkeitsfunktion
$u(t)$	Stellgröße, Systemeingang
V	Volumen
$U(s)$	Laplace transformierte der Stellgröße
$w(t)$	Führungsgröße
W	Widerstand
$W(s)$	Laplace transformierte der Führungsgröße
$x(t)$	Zustandsvariable
$X(s)$	Laplace transformierte der Zustandsvariablen
$y(t)$	Regelgröße, Systemausgang
$Y(s)$	Laplace transformierte der Regelgröße
$z(t)$	Störgröße
$Z(s)$	Laplace transformierte der Störgröße; Zählerpolynom
$\delta(t)$	Dirac'scher Deltaimpuls, Stoßfunktion
λ	Eigenwert
τ	laufende Zeit; Verzögerungszeit
φ	Winkel
ω	Kreisfrequenz (allgemein)
ω_o	Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Schwingers
$1(t)$	Einheitssprungfunktion
$\mathcal{L}\{\cdot\}$	Symbol für „Laplace transformierte von ...“
\mathbb{R}^n	n -dimensionaler Vektorraum der reellen Zahlen

Symbole elektrischer, mechanischer und fluidtechnischer Bauelemente

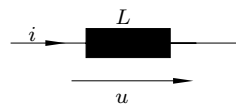
Elektrische Bauelemente:



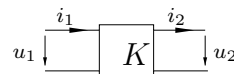
Widerstand



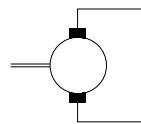
Kondensator



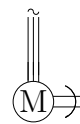
Induktivität



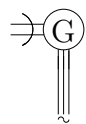
idealer Verstärker



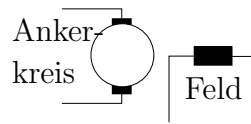
Gleichstromgenerator



Elektromotor

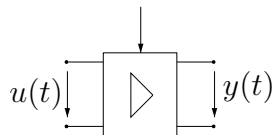


Drehstromgenerator

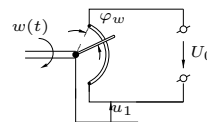


Gleichstrommotor

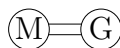
Hilfsenergie



Verstärker

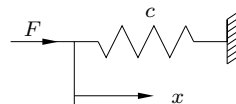


Potentiometer

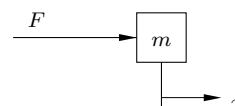


Motorgenerator

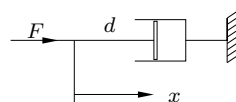
Mechanische Bauelemente:



Feder

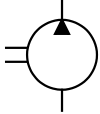
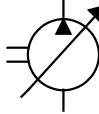
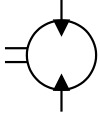
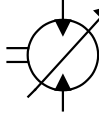
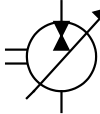

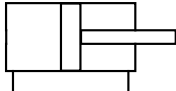
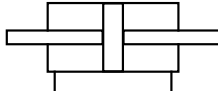
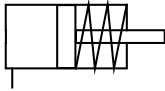


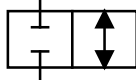

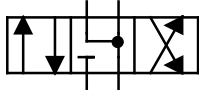
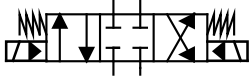

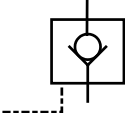
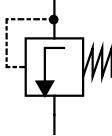
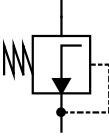
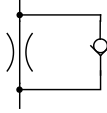


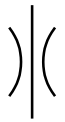
Masse



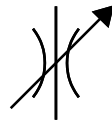
Dämpfer

Fluidtechnische Bauelemente (Auswahl aus der DIN 1219):

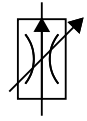
	Konstantpumpe		Pumpe mit verstellbarem Verdrängervolumen
	Konstantmotor		Verstellmotor
	Verstellbare Verdrängereinheit (4 Quadrantenbetrieb)		Druckspeicher
	Differentialzylinder -doppelt wirkend-		Gleichgangzylinder -doppelt wirkend-
	Differentialzylinder -einfach wirkend mit Federrückstellung-		Ventil mit 2 Schaltstellungen
	Ventil mit 3 Schaltstellungen		2/2-Wegeventil
	Tank		4/3-Wegeventil
	4/3-Wegeventil, elektrohydraulisch betätigt, federzentriert		Rückschlagventil
	entsperrbares Rückschlagventil		Druckbegrenzungsventil
	Druckminderventil		Drosselrückschlagventil



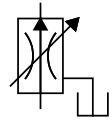
Drossel



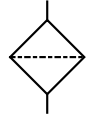
einstellbare
Drossel



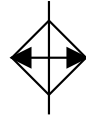
2-Wege
Stromregel-
ventil



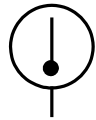
3-Wege
Stromregel-
ventil



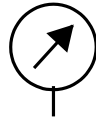
Filter



Kühler

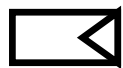


Thermometer



Manometer

Betätigungsarten für Ventile:



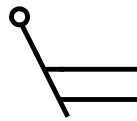
pneumatisch



hydraulisch

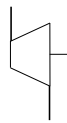


elektromagnetisch

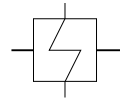


handbetätigt

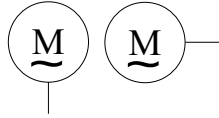
Bauelemente für Wärmekraftanlagen (Auswahl aus der DIN 2481):



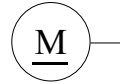
Turbine



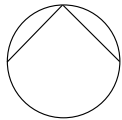
Wärmetauscher



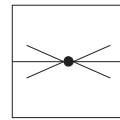
Wechselstrommotor



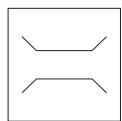
Gleichstrommotor



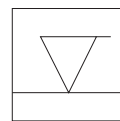
Flüssigkeitspumpe



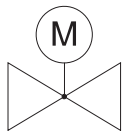
Druckmessung



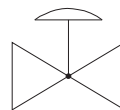
Durchflußmessung



Niveaumessung



Absperrarmatur
mit Elektro-
motor



Absperrarmatur
mit
Membrantrieb

1 Einführung

1.1 Einordnung der Regelungstechnik

Die Regelungstechnik ist ein wichtiges Teilgebiet der Automatisierungstechnik und wird in vielen Ingenieurstudienrichtungen als Pflichtfach gelehrt. Die Automatisierungstechnik ist gekennzeichnet durch selbsttätig arbeitende Maschinen und Geräte, die zu sehr komplexen, industriellen Prozessen und Systemen zusammengefaßt sein können. In Bild 1.1 ist schematisch der Aufbau eines automatisierten Fertigungsprozesses sowie die Einordnung der „Regelungstechnik“ dargestellt.

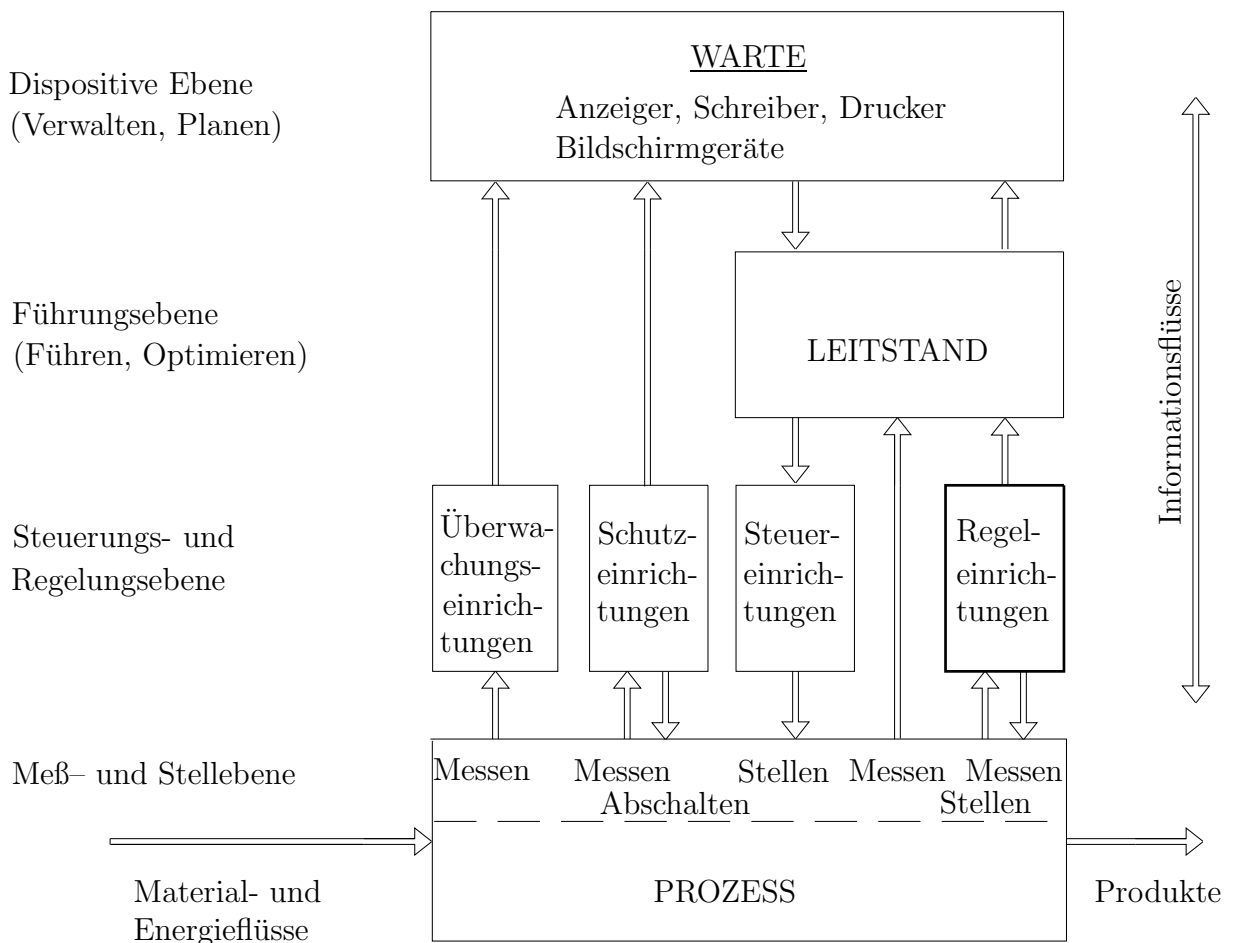


Bild 1.1: Informationsflüsse und -ebenen in einem automatisierten Prozeß

Eine wesentliche Aufgabe der Regelungstechnik besteht darin, vorgegebene Größen – meist bei technischen Prozessen – vorgegebenen Sollfunktionen möglichst gut folgen zu lassen. Störungen, die auf die Anlage einwirken, sollen dabei die zu regelnden Größen möglichst wenig beeinflussen.

Die Regelungstechnik basiert wiederum auf der Beschreibung und der Analyse der Systemdynamik, der sogenannten Systemtheorie dynamischer Systeme. Die Theorie dyna-

mischer Systeme hat heutzutage einen fachübergreifenden Charakter, ähnlich den Grundlagenfächern Mathematik und Physik.

Die Systemtheorie beinhaltet eine konsequente mathematische Beschreibung des *Ursache–Wirkung–Denkens*. Damit ist die Systemtheorie in der Lage, den Wirkungszusammenhang komplexer technischer Anlagen und Systeme losgelöst von technologischen Details verständlich zu machen. Die mathematischen Methoden der Systemtheorie und der Regelungstechnik haben sich darüber hinaus inzwischen auch hervorragend in völlig anderen Disziplinen wie Biologie, Volkswirtschaft, Soziologie und selbst zur Beschreibung politischer Zusammenhänge bewährt.

Untersucht man unterschiedliche Regelungsaufgaben näher, werden immer wieder ähnliche Strukturen gefunden, die sich vor allem dadurch auszeichnen, daß ein geschlossener Wirkungsablauf – der Regelkreis – erkennbar wird. Dieser geschlossene Wirkungsablauf beinhaltet eine Reihe grundsätzlicher Probleme, die allen Anwendungsfällen gemein sind. Daher ist der Einsatz regelungstechnischer Methoden weitgehend unabhängig vom jeweiligen Anwendungsfall. Wesentlich für die einheitliche Behandlung ist, daß das vorliegende (technische) Problem in einer geeigneten, – wie sich zeigen wird, sehr abstrakten – Weise beschrieben wird. Diese Beschreibungen werden *MODELLE* genannt, da sie nur einen Teil der Eigenschaften des gegebenen regelungstechnischen Problems wiedergeben. Modelle können die Form von Gleichungen und Gleichungssystemen, von physikalischen Ersatzsystemen (Analogien) oder auch von verbalen Beschreibungen haben.

1.2 Historische Entwicklung der Regelungstechnik

Die ältesten Überlieferungen über technische Regelsysteme gehen auf die Zeit des Hellenismus im 2. vorchristlichen Jahrhundert in Alexandrien zurück. Von Vitruvius werden Wasseruhren des berühmten Mechanikers Ktesibios beschrieben, die wahrscheinlich ein Regelprinzip enthielten. Das erste gesicherte Beispiel eines technischen Regelsystems wird dann etwa 300 Jahre später von Heron aus Alexandrien überliefert: Die Wasserregulierung in einem Bewässerungssystem.

Bevor auf die weitere geschichtliche Entwicklung eingegangen wird, sollte jedoch vorweg festgestellt werden, daß das Regelungsprinzip grundsätzlich keine technische Erfindung, sondern eigentlich ein Naturphänomen ist. Das grundlegende Prinzip einer Regelung ist in fast allen Lebewesen wiederzufinden. Diese besitzen fühlende und regulierende Organe (Sensoren und Aktoren), die jeder Störung der Lebensbedingungen entgegenwirken. Diese Regelmechanismen ermöglichen beispielsweise die aufrechte Haltung des Menschen und die Konstanthaltung seiner Körpertemperatur. Das Regelungsprinzip ist aber auch bei zahlreichen anderen Vorgängen wiederzufinden, so z.B. beim Ablauf von ökonomischen und soziologischen Prozessen.

Der Durchbruch der technischen Regelung erfolgte jedoch erst in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts mit der Fliehkraftregelung der Drehzahl von Maschinen. Die Entwicklung

der Regelungstechnik läßt sich seit dieser Zeit in vier größere Perioden einteilen (vgl. Tabelle 1.1):

- Die sogenannte frühe Periode bis 1900.
- Die Periode 1900–1940 der vor–klassischen Regelungstechnik.
- Die Periode 1940–1960 der klassischen Regelungstechnik.
- Die Periode seit etwa 1955 ist die Zeit der modernen Regelungstechnik.

Die erste Periode beginnt 1788 mit der bereits erwähnten Anwendung, des aus dem Mühlenbau bekannten Fliehkraftreglers auf die Drehzahlregelung von Dampfmaschinen, durch James Watt. Die ersten 70 Jahre des 19. Jahrhunderts waren dann durch Arbeiten zur Verbesserung des Fliehkraftreglers von Watt gekennzeichnet. Die ersten analytischen Untersuchungen über das Zusammenwirken von Regler und Regelstrecke mit Hilfe von Differentialgleichungen wurden erst 1868 von J. Maxwell durchgeführt, der dadurch auch als Begründer einer allgemeinen Regelungstheorie angesehen wird.

Die zweite Periode, die etwa kurz vor 1900 einsetzt, ist gekennzeichnet durch eine strenge mathematische Behandlung regelungstechnischer Vorgänge in verschiedenen Anwendungsbereichen. Hier sind insbesondere Arbeiten von A. Stodola und M. Tolle über die Regelung von Turbinen und Kolbenkraftmaschinen zu nennen. Das von Tolle 1905 veröffentlichte Buch über „Regelung von Kraftmaschinen“ darf als erstes systematisches regelungstechnisches Lehrbuch angesehen werden. In dieselbe Zeit fällt die Entwicklung der Stabilitätskriterien von E. Routh und A. Hurwitz. Diese Kriterien erlauben Aussagen über die Stabilität eines Systems anhand der charakteristischen Gleichung, wobei eine explizite Lösung der charakteristischen Gleichung nicht erforderlich ist.

Im Jahr 1922 wurde von Nicholas Minorsky erstmals ein Regelgesetz vorgeschlagen, das heute PID–Regelung genannt wird. Eine Realisierung komplexerer Regelkreise war in dieser Zeit nur schwer möglich, da lineare, stabile elektrische Verstärker zur Verstärkung der schwachen Meßsignale auf ein zur Ansteuerung von Stellgliedern erforderliches Niveau nicht verfügbar waren.

Somit wurde die Regelungstechnik etwa um das Jahr 1930 stark durch die elektrische Nachrichtentechnik und die Entwicklung stabiler Verstärker beeinflusst. Hier waren es vor allem Küpfmüller (1928) mit der Behandlung von Stabilitätsproblemen rückgekoppelter Verstärker und H. Nyquist (1932) mit der Einführung neuartiger Stabilitätsbetrachtungen anhand der Frequenzgangortskurve, die der Regelungstechnik nachhaltige Impulse gaben.

Etwa um 1940 begann die dritte Periode. Während dieser Zeit entstanden in Deutschland grundlegende Arbeiten von A. Leonhard und W. Oppelt, die dazu beitrugen, daß die Regelungstechnik damals zu einer einheitlichen, systematisch geordneten und selbständigen Ingenieurwissenschaft wurde. In diese Periode der „klassischen“ Regelungstechnik fällt

auch die erste geschlossene mathematische Behandlung der Dynamik selbsttätiger Regelungen von Bode im Jahre 1945. In der Folgezeit wurde deutlich, daß das dynamische Verhalten von Systemen unabhängig von ihrer technischen Realisierung, die mechanisch, elektrisch, hydraulisch, pneumatisch oder daraus kombiniert sein kann, durch eine Übertragungsfunktion einheitlich beschrieben werden kann. Es entstand das sogenannte *Systemdenken*, das im Sinne der Kybernetik auch für andere Wissenschaftsgebiete propagiert wurde.

Die heute übliche Darstellung von Regelkreisen mit gerichteten Flußdiagrammen (Blockschaltbilder), die den Energie- und Informationsfluß im System verdeutlichen, wurde unter der Führung von Gordon S. Brown am MIT entwickelt und setzte sich in den vierziger Jahren nur allmählich durch. Mit der Entwicklung der Wurzelortskurvenmethode von Walter Evans waren um 1950 herum die wesentlichen Elemente der „klassischen Regelungstheorie“ bereitgestellt.

Die Erfahrungen während des 2. Weltkrieges machten deutlich, daß alle Reglerentwurfverfahren, die von einem linearen, deterministischen Systemverhalten ausgehen, für reale Systeme nur bedingt geeignet sind. Reale Systeme haben meistens ein nichtlineares Verhalten, die realen Meßgrößen sind fehlerhaft und mit Rauschen überlagert, und in realen Systemen sind sowohl die Regelstrecke als auch die Umgebungseinflüsse nicht exakt bekannt. Die weitere Entwicklung der Regelungstechnik erfolgte in den Nachkriegsjahren daher hauptsächlich auf den Gebieten der statistischen Regelverfahren (Norbert Wiener, 1949), der nichtlinearen Systeme sowie der Behandlung von Abtastregelkreisen. Die Technik der Regelgeräte wurde weitgehend vereinheitlicht. Es entstanden die pneumatischen und elektronischen Gerätekonzeptionen der PID-Einheitsregler und die bis heute verwendeten Einstellregeln wurden von Ziegler und Nichols in langen Versuchsreihen ermittelt.

Um 1960 kann der Beginn der vierten Periode, oft auch als „moderne“ Regelungstechnik bezeichnet, datiert werden. Die elektronischen Analogrechner boten bereits in den 1950er Jahren die Möglichkeit, auch komplexe dynamische Vorgänge, wie sie beispielsweise in der Raumfahrt auftreten, in Echtzeit zu simulieren. Im Zusammenhang mit der Verfügbarkeit leistungsfähiger digitaler Rechenmaschinen ist auch die Einführung optimaler Regel- und Steuerverfahren zu sehen, die etwa um 1956 in der Sowjetunion mit der Entwicklung des „Maximumprinzips“ durch L. Pontrjagin und etwa zur selben Zeit in den USA mit der „dynamischen Programmierung“ durch R. Bellmann einsetzte. Das Prinzip dieser modernen optimalen Regelverfahren erforderte, als neue Beschreibungsform für Regelsysteme, die Verwendung der Zustandsraumdarstellung, die etwa achtzig Jahre zuvor bereits in der theoretischen Mechanik eingeführt worden war.

Die Entwicklung der Zustandsraummethoden wurde Ende der 1950er und Anfang der 1960er Jahre maßgeblich durch die Arbeiten von Kalman beeinflusst. Zunächst führte Kalman Ende der 1950er Jahre das Konzept der Steuer- und Beobachtbarkeit ein. 1960 konnte er zeigen, daß eine exakte Dualität zwischen dem Entwurf einer Mehrgrößenregelung und der Schätzung der Zustandsgrößen existiert. Insbesondere die Entwicklung eines Fil-

ters, heute *Kalman-Filter* genannt, zur optimalen Schätzung der Zustandsgrößen anhand von verrauschten Meßgrößen, stellte einen Meilenstein dar und konnte erfolgreich bei den Raumfahrtprojekten der 1960er Jahre eingesetzt werden. Bis in die 1980er Jahre dominierten die Zeitbereichsmethoden im Zustandsraum die Forschung und Entwicklung im Bereich der Regelungstechnik.

Etwa um 1960 fand der Digitalrechner als Prozeßrechner auch Einsatz bei der direkten digitalen Regelung (Direct Digital Control DDC) in komplexen regelungstechnischen Prozessen, wie sie bei technischen Großanlagen (Mehrgrößenregelsystemen) zur Prozeßführung erforderlich sind. Diese sogenannten Prozeßrechner ermöglichten die Verarbeitung der zahlreichen anfallenden Meßwerte und übernahmen dann die optimale Führung des gesamten Prozesses. Dieser Rechnereinsatz beim Realzeitbetrieb geregelter technischer Prozesse erfuhr anfänglich manchen Rückschlag, doch Anfang der siebziger Jahre gehörte bei vielen komplexen Regelanlagen der Prozeßrechner als Instrument zur Überwachung, Protokollierung, Regelung und Steuerung technischer Prozesse bereits zur Standardausrüstung.

Die Entwicklung relativ preiswerter Mikroprozessoren ab etwa 1975 führte schließlich in den achtziger Jahren zur digitalen Gerätetechnik und damit zu leistungsfähigen Prozeßleitsystemen mit dezentraler verteilter Rechnerkapazität. Diese dezentralen Prozeßleitsysteme ersetzen ab 1985 weitgehend den zentralen Prozeßrechner bei der Automatisierung technischer Prozesse. Leider waren die bis etwa 1998 neu in Betrieb genommenen Prozeßleitsysteme von ihrem Software-Aufbau weitgehend „geschlossene“ Systeme, die dem Anwender aus sicherheitstechnischen Gründen kaum die Gelegenheit boten, andere als nur die normalerweise installierten klassischen PID-Regler programmtechnisch zu verwirklichen. Erst neuerdings, seit etwa 1998, sind leistungsfähige „offene“ Leitsysteme verfügbar, in deren Rahmen der Anwender über den PID-Regler hinaus auch anspruchsvolle Regler implementieren kann. Hier sind für die Zukunft dringende Erweiterungen, insbesondere mit dem Einsatz von nichtlinearen und intelligenten Regelverfahren, wie z.B. Fuzzy-Regler erforderlich.

Obwohl bereits im Jahre 1965 von L. Zadeh vorgeschlagen, stieß die Fuzzy-Regelung in den USA und Europa zunächst auf wenig Interesse. Etwa ab 1980 setzte, jedoch zuerst in Japan und dadurch aufgeschreckt ab 1990 auch in den USA und Europa, der erfolgreiche Einsatz dieses neuen Zweiges der Regelungstechnik ein. Zusammen mit dem zunehmenden Einsatz von künstlichen neuronalen Netzen eröffnet sich mit diesem Werkzeug die Realisierung „intelligenter“ Regelsysteme. Zu Beginn des 21. Jahrhunderts zeichnet sich hier der Meilenstein für eine neue fünfte Entwicklungsphase der Regelungstechnik ab.

Leider sind die Begriffe der „klassischen“ und „modernen“ Regelungstechnik etwas irreführend. Die klassischen Methoden der Regelungstechnik umfassen weitgehend die Analyse- und Syntheseverfahren im Frequenzbereich, die heute im wesentlichen uneingeschränkt ihre volle Bedeutung haben. Die modernen Methoden gestatten hingegen die Behandlung von Regelsystemen auch im Zeitbereich. Je nach dem speziellen Anwendungsfall werden sowohl die einen als auch die anderen Verfahren mit gleicher Priorität

eingesetzt. Die intelligenten Regelverfahren stellen teils Alternativen zu den klassischen und modernen Verfahren dar, teils ergänzen sie diese zu weitergehenden Eigenschaften, z.B. zur Entwicklung lernender oder adaptiver Regelverfahren.

Periode	Jahr	Name	Fortschritte in der Regelungstechnik
I	1788	J. Watt	Entwicklung des Drehzahlreglers, Anwendung in der Energieerzeugung, z.B. Dampfmaschinen, Windmühlen;
	1868	J. Maxwell	theoretische Analyse des Fliehkraftreglers
II	1877	E.J. Routh	Anwendung von Differentialgleichungen zur Beschreibung von Regelvorgängen; Stabilitätsuntersuchungen; Regelung von Turbinen und Kolbenmaschinen; Stabilitätsanalyse; Rückkopplungsprinzip; Frequenzgangmethoden; Anwendungen: Energietechnik, Nachrichtentechnik, Waffentechnik, Luftfahrttechnik.
	1893	A. Stodola	
	1895	A. Hurwitz	
	1905	M. Tolle	
	1928	K. Küpfmüller	
	1932	H. Nyquist	
III	1940	A. Leonhard	Entwicklung der Regelungstechnik zu einer selbständigen Disziplin der Ingenieurwissenschaften; systematische mathematische Darstellung; Einführung neuer Methoden im Frequenzbereich; Laplace-Transformation; statistische Methoden der Regelungstechnik; Abtastregelsysteme; nichtlineare Regelvorgänge, Entwicklung elektronischer und pneumatischer Einheitsregler; breite industrielle Anwendungen; Gründung der IFAC (International Federation of Automatic Control).
	1944	W. Oppelt	
		R. Oldenbourg und H. Sartorius	
	1945	H. Bode	
	1950	N. Wiener	
	1955	J. Truxal	
	1956	IFAC	
IV	1956	L. Pontrjagin	Entwicklung des Maximumprinzips und der dynamischen Programmierung zur Behandlung optimaler Regelvorgänge; Einführung der Zustandsraum-Darstellung und der Stabilitätsbetrachtungen nach Ljapunow (bereits 1892 entwickelt); Einsatz elektronischer Rechenanlagen zur Analyse und Synthese von Mehrgrößenregelsystemen; Einsatz von Prozeßrechnern zur direkten digitalen Regelung (DDC-Konzept zur Prozeßführung); Software-Entwicklung für Regelungsaufgaben; Anwendungen in nahezu allen Teilgebieten der Technik sowie auch bei nichttechnischen Problemen (z.B. Weltmodell nach Forrester); Fuzzy-Regelung
	1957	R. Bellman	
	1958	R.E. Kalman	
	1960	DCC (Industrie)	
		L. Zadeh (Industrie)	
	1965	(Industrie)	
	1970	(Industrie)	
	1975	(Industrie)	
	1980	(Industrie)	
	1985	(Industrie)	
	1995	(Industrie)	
1998	(Industrie)		

Tabelle 1.1: Zeitliche Entwicklung in der Regelungstechnik nach Unbehauen

1.3 Bezeichnungen und Definitionen

Die System- und Signaltheorie bilden eine wesentliche Grundlage der Theorie der selbsttätigen Regelung. In diesem Abschnitt werden einige Begriffe definiert und erläutert, die für das Verständnis des Stoffes wesentlich sind.

Definition 1.1a (in Anlehnung an DIN 19 226)

Ein System ist eine abgegrenzte Anordnung von aufeinanderwirkenden Gebilden (Teilen). Solche Gebilde können sowohl Gegenstände als auch Denkmethode und deren Ergebnisse (z.B. Organisationsformen, mathematische Methoden, Programmiersprachen o. ä.) sein. Diese Anordnung wird durch eine Hüllfläche von der Umgebung abgegrenzt oder abgegrenzt gedacht.

Durch die Hüllfläche werden Verbindungen des Systems mit seiner Umgebung geschnitten. Die mit diesen Verbindungen übertragenen Eigenschaften und Zustände sind die *Größen*, deren Beziehungen untereinander das dem System eigentümliche Verhalten beschreiben. Durch zweckmäßiges Zusammenfügen und Unterteilen von solchen Systemen können größere und kleinere Systeme entstehen. □

Von dieser ausführlichen Beschreibung ausgehend, kann das *System* weiter verkürzt definiert werden:

Definition 1.1b (nach Forrester)

Ein System ist eine Anordnung von Gebilden (Teilen), die für einen gemeinsamen Zweck zusammenwirken. □

Neben dem System ist der Begriff des Signals von besonderer Bedeutung.

Definition 1.2

- a) **Signale** sind physikalische Tatbestände, die der Übertragung, Speicherung und Verarbeitung von Nachrichten dienen.
- b) **Information** ist die naturwissenschaftlich definierte Nachricht. □

Der moderne, auf SHANNON zurückgehende Signalbegriff kann auch in dieser Form dargestellt werden:

$$\mathbf{Signal} = \mathbf{Energie} + \mathbf{Information}$$

Die Regelungstechnik und die ihr zugrundeliegende Theorie der dynamischen Systeme sowie der Signalübertragung in Systemen beschäftigt sich in erster Linie mit der Informationsübertragung unter weitgehender Vernachlässigung energetischer Überlegungen.

Definition 1.3 (nach Unbehauen)

Ein **dynamisches System** stellt eine Funktionseinheit zur Verarbeitung und Übertragung von Signalen dar, wobei die Systemeingangsgrößen als Ursache und die Systemausgangsgrößen als deren *zeitliche* Auswirkungen zueinander in Relation gebracht werden. □

Viele der in der folgenden Darstellung benutzten Bezeichnungen sind in DIN 19 226 „Regelungstechnik und Steuerungstechnik“ genormt. Einige der häufig vorkommenden Begriffe werden hier zunächst zusammenfassend eingeführt.

Regelgröße: Größe (Veränderliche), die unabhängig von äußeren Einflüssen auf einem gewünschten, festen oder veränderlichen Wert gehalten werden soll.

Störgröße: Jede auf eine Regelung einwirkende Größe, die die beabsichtigte Beeinflussung der Regelung behindert.

Stellgröße: Größe, durch deren Änderung die Regelgröße beeinflusst werden kann. Die Stellgröße ist die Ausgangsgröße der Regeleinrichtung und Eingangsgröße der Regelstrecke. Mit der Stellgröße wird der Energie- und/oder Materialfluß in die Regelstrecke beeinflusst.

Regelstrecke: Anlage (Gerät), bei der (dem) eine oder mehrere Größen – die Regelgrößen – gegen unbeabsichtigte Einflüsse auf gewünschten Werten gehalten werden, indem eine oder mehrere Eingangsgrößen – die Stellgrößen – verändert werden.

Regler: Gerät zur Erfassung der Differenz zwischen Istwert und Sollwert der Regelgröße und zur Betätigung des Stellgliedes.

Stellglied: Ein am Eingang der Strecke liegendes Glied zur Beeinflussung eines Energie- oder Mengenstromes.

Regelkreis: Geschlossener Wirkungskreis aus Regelstrecke und Regeleinrichtung.

Sollwert: Wert, den eine (Regel-)Größe im betrachteten Zeitpunkt unter festgelegten Bedingungen haben soll.

Istwert: Wert, den eine Größe im betrachteten Zeitpunkt tatsächlich hat.

Führungsgröße: Größe, die der Regeleinrichtung von außen zugeführt wird und der die Regelgröße folgen soll

Am Beispiel einer typischen regelungstechnischen Aufgabe werden die Begriffe und ihre Zuordnung aufgezeigt.

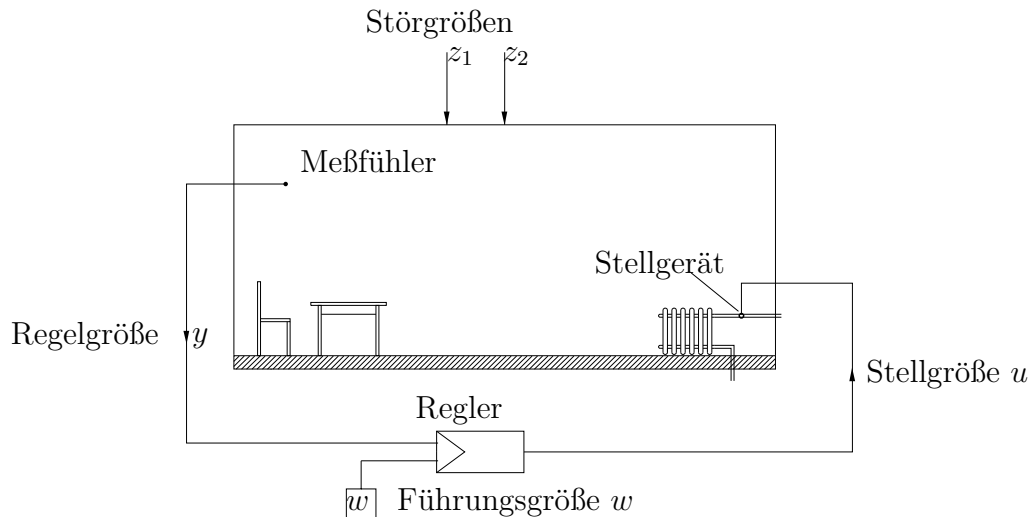


Bild 1.2: Geräteplan einer Raumtemperaturregelung

1.4 Systembeschreibung mittels Blockschaltbildern

Ein einfaches und effektives Hilfsmittel für die Beschreibung dynamischer Systeme ist die Darstellung mit Hilfe von Blockschaltbildern:

- Das Blockschaltbild (oder der Signalflußplan) ist ein Signalflußdiagramm zur Darstellung des Signalfusses und des Wirkungszusammenhangs in einem Regelkreis.
- Das Blockschaltbild dient zur Charakterisierung des Übertragungsverhaltens einzelner Regelkreisglieder – oder allgemeiner: *dynamischer Teilsysteme*.
- Mit Hilfe des Blockschaltbildes wird eine von allen technischen Details abstrahierte Darstellung des Regelungsproblems gewonnen.

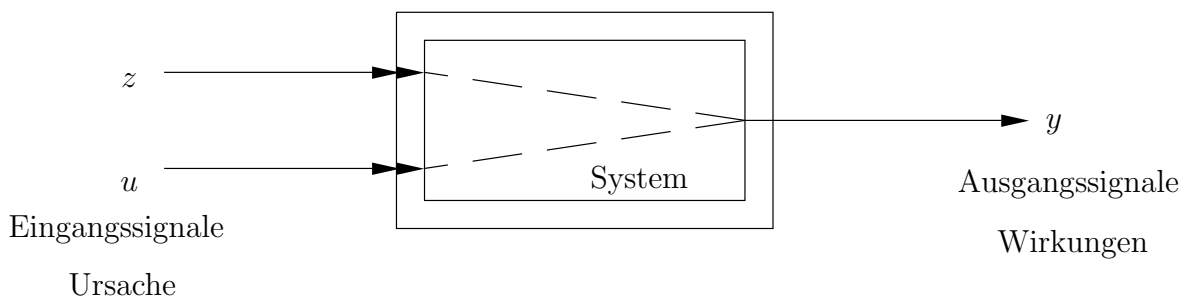


Bild 1.3: Blockschaltbild zur vereinfachten Darstellung des Ursache-Wirkungszusammenhangs

Das Ursache–Wirkung–Verhalten eines Systems ist fast immer nichtlinear, was in einem Blockschaltbild durch einen doppelt umrandeten Block angedeutet wird (zum Begriff „Linearität“ s. a. Abschnitt 2.2).

In Bild 1.4 ist am Beispiel des **statischen** oder quasistationären Verhaltens einer Dampfturbine (s. a. Bild 1.6a) eine typische nichtlineare (statische) Ursache–Wirkung–Beziehung dargestellt.

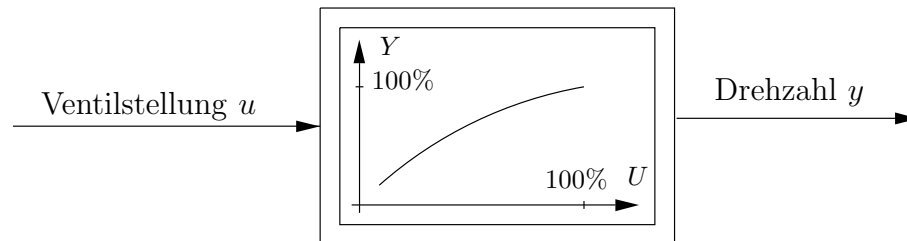


Bild 1.4: Nichtlineares Übertragungssystem

Im Falle nur linearer Regelkreisglieder läßt sich das Zusammenwirken aller Teilsysteme besonders übersichtlich gestalten und auch mathematisch mit Hilfe der *Blockschaltbildalgebra* behandeln.

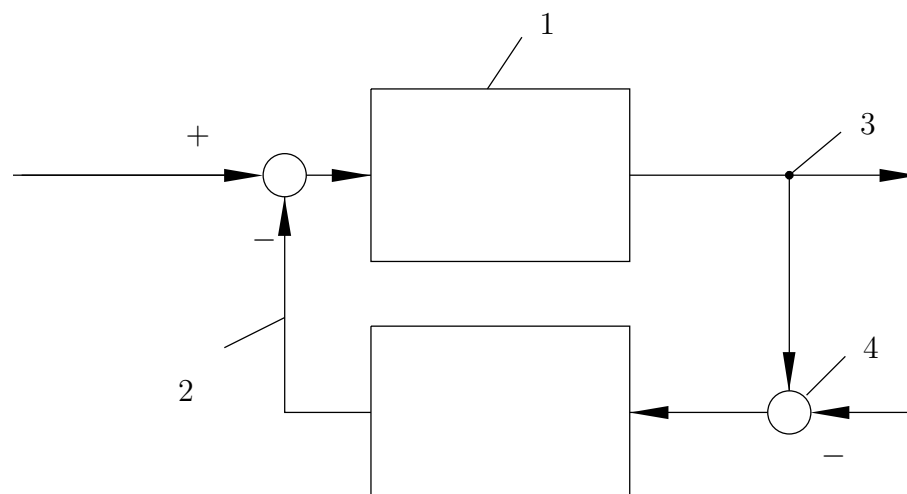


Bild 1.5: Die 4 graphischen Elemente des Blockschaltbildes für lineare Systeme

- 1) Übertragungskasten
- 2) Gerichtete Wirkungslinie, Signal
- 3) Signalverzweigung
- 4) Mischstelle

An Übertragungsglieder wird die Bedingung gestellt, daß sie rückwirkungsfrei sind, d.h. daß der Ausgang keinen Einfluß auf den Eingang hat. Dies ist eine allgemein übliche Vereinbarung. Rückkopplungen, die bei realen Systemen vorkommen, müssen bei der Blockschaltbilddarstellung durch entsprechende Signalfade berücksichtigt werden.

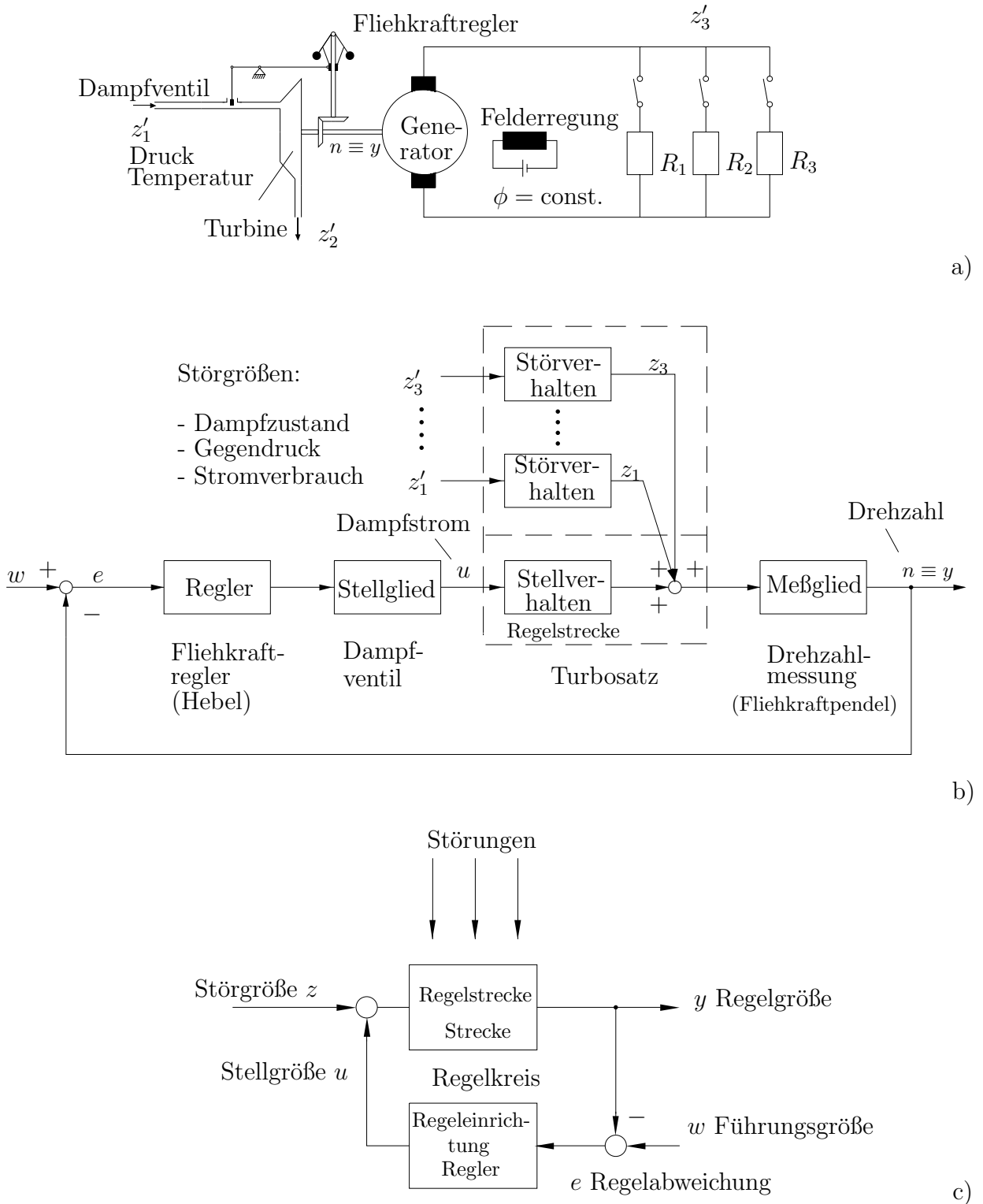


Bild 1.6: Abstraktionsschritte beim Übergang von Gerätebild a) über Signalflußplan b) zum Blockschaltbild des (linearen) Regelkreises c)

1.5 Das statische Kennlinienfeld

Bei Übertragungsgliedern kann man zwischen dem dynamischen und statischen Verhalten unterscheiden. Das *dynamische Verhalten* oder *Zeitverhalten* beschreibt den gesamten zeitlichen Verlauf der Ausgangsgröße $y(t)$ bei vorgegebener Eingangsgröße $u(t)$. Nimmt die Ausgangsgröße $y(t)$ für eine konstante Eingangsgröße ($u(t) = \text{const}$) einen endlichen stationären Endwert $y(\infty)$ an, so kann man die Eingangsamplitude variieren und die sich einstellenden stationären Werte der Ausgangsgröße über den Eingangswerten auftragen. Diese sogenannte *statische Kennlinie* beschreibt also das statische Verhalten oder Behaviorsverhalten des Systems in einem gewissen Arbeitsbereich. Bei technischen Systemen sind diese statischen Ursache–Wirkung–Beziehungen häufig nichtlinear, Bild 1.4.

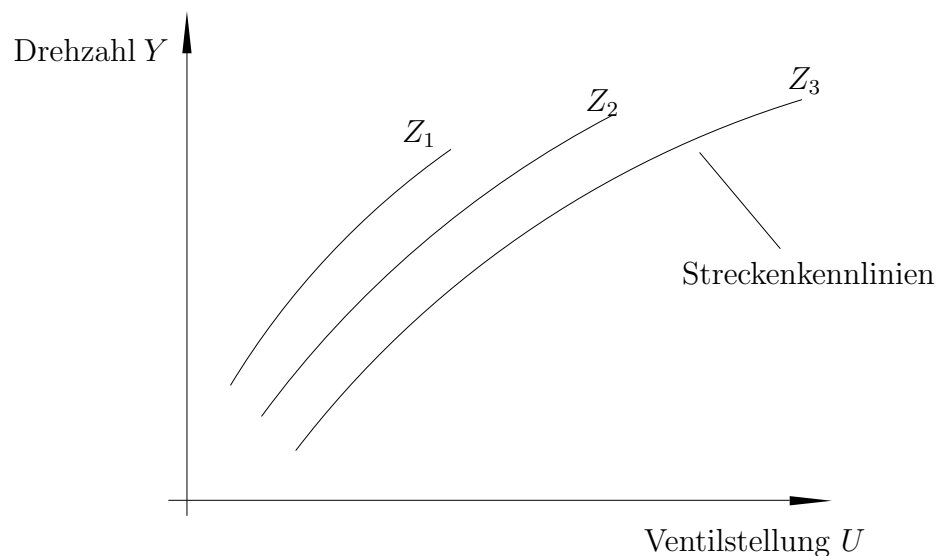


Bild 1.7: Typisches Kennlinienfeld einer Dampfturbine

In Bild 1.7 ist für die Dampfturbinenregelung nach Bild 1.6 der statische Zusammenhang zwischen Stellgröße – Ventilstellung U – und Regelgröße – Drehzahl Y – für unterschiedliche Belastungen Z_1, Z_2 und Z_3 dargestellt, die in Bild 1.6a durch die elektrischen Lastwiderstände R_1, R_2 und R_3 angedeutet sind.

1.6 Steuerung und Regelung

Mit Hilfe der bisherigen Betrachtungen läßt sich die Aufgabe des Regelungstechnikers wie folgt formulieren:

- **Gegeben** ist ein dynamisches System (*Regelstrecke, Strecke*) mit von außen beeinflussbaren Größen (*Stellgrößen, Eingangsgroßen*) und meßbaren Größen (*Regelgrößen, Ausgangsgroßen*). Darüber hinaus ist ein Regelungsziel vorgegeben, das typischerweise die Aufgabe enthält, eine oder mehrere meßbare Größen auf vorgegebenen konstanten Werten zu halten oder in der durch die *Führungsgröße* vorgegebenen Weise zeitlich zu verändern. Gleichzeitig soll die Wirkung äußerer *Störungen* auf die Ausgangsgroßen unterdrückt werden.
- **Gesucht** ist eine Regeleinrichtung (*Regler*), die unter Nutzung der gemessenen Werte die *Stellgröße* so vorgibt, daß das geregelte System das Regelungsziel erfüllt.

Das Grundproblem der Regelungstechnik läßt sich anhand von Bild 1.8 erläutern:

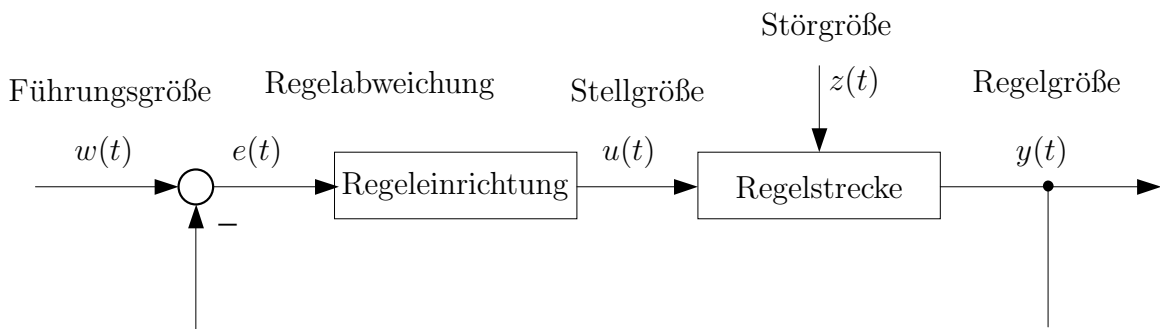


Bild 1.8: Grundstruktur des linearen Regelkreises

Die Regelgröße $y(t)$ ist von der Stellgröße $u(t)$ und einer Störgröße $z(t)$ abhängig, die nicht beeinflussbar ist. Das Ziel der Regelung besteht darin, die Regelgröße der vorgegebenen Führungsgröße $w(t)$ nachzuführen, so daß idealerweise $y(t) = w(t)$ für alle Zeitpunkte t gilt. Der Regler muß deshalb die Stellgröße $u(t)$ so berechnen, daß sowohl der Einfluß der Störgröße auf die Regelgröße kompensiert als auch die Regelgröße der Führungsgröße angepaßt wird. Dabei stehen dem Regler als Informationen neben der Führungsgröße $w(t)$ auch der aktuelle Wert der Regelgröße $y(t)$ zur Verfügung. Aus diesen beiden Größen berechnet der Regler ständig zunächst die *Regelabweichung* (Regeldifferenz)

$$e(t) = w(t) - y(t)$$

und dann in Abhängigkeit davon die neue Stellgröße $u(t)$.

Bei einer Regelung kann man zunächst zwei Fälle unterscheiden:

- Einerseits hat eine Regelung die Aufgabe, in einem Prozeß Störeinflüsse zu beseitigen. Bestimmte Größen eines Prozesses, die Regelgrößen, sollen vorgegebene feste

Sollwerte einhalten, ohne daß die Störungen, die auf den Prozeß einwirken, von nennenswertem Einfluß sind. Eine derartige Regelung wird als **Festwertregelung** oder **Störgrößenregelung** bezeichnet.

- Andererseits müssen oftmals die Regelgrößen eines Prozesses den sich ändernden Sollwerten möglichst gut nachgeführt werden. Diese Regelungsart wird **Folgeregelung** oder **Nachlaufregelung** genannt. In diesem Fall wird die sich ändernde Sollgröße treffender als Führungsgröße bezeichnet.

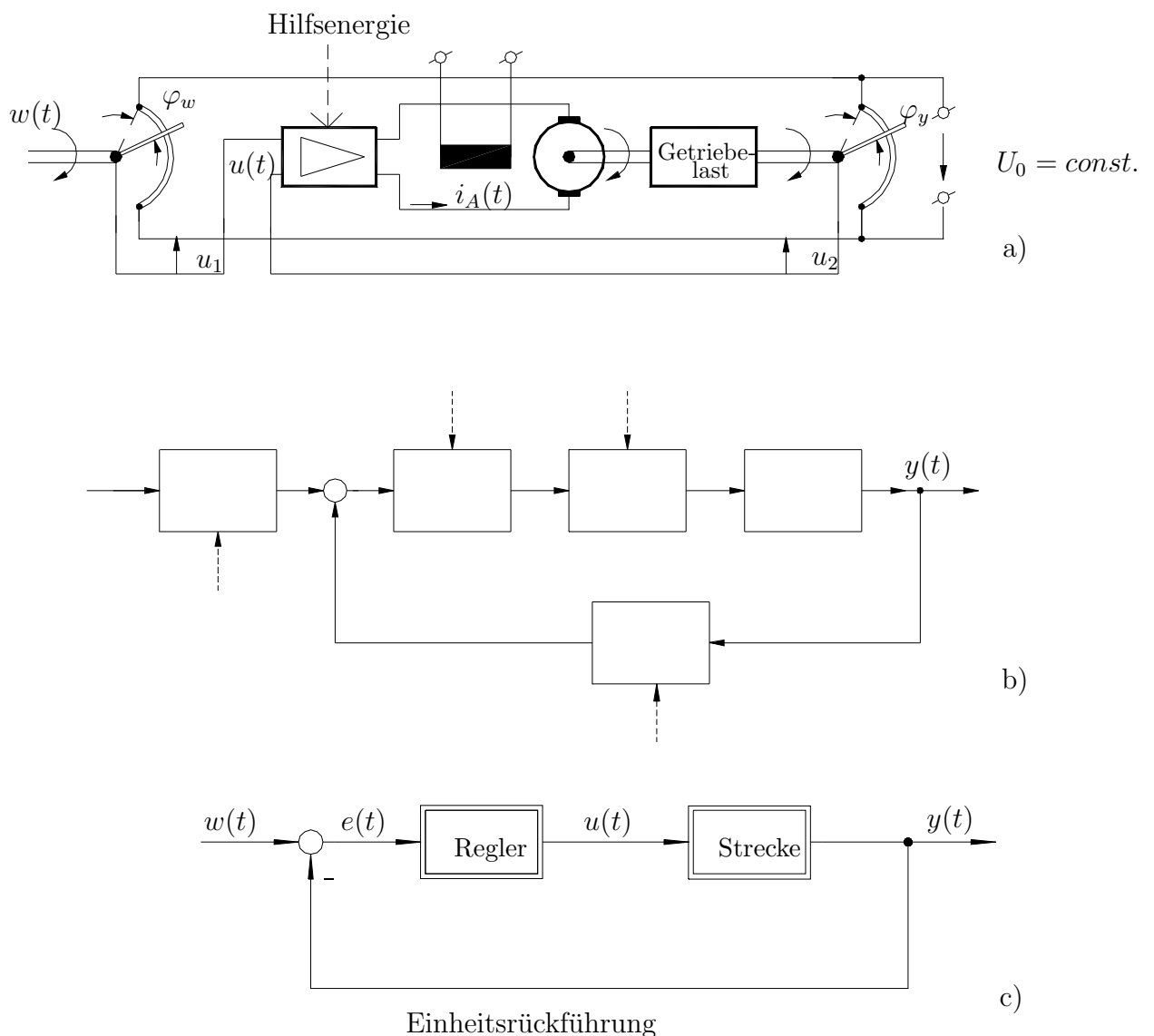


Bild 1.9: Folge- (Servo-)regelung. a) Geräteplan b) unvollständiger Signalflußplan c) vereinfachtes Blockschaltbild

Die Ausgangsgröße eines dynamischen Systems kann einer Führungsgröße auch ohne Rückführung nachgeführt werden. In einer Steuerkette wird die Stellgröße direkt aus

der Führungsgröße ermittelt (Bild 1.10). Man spricht dann von der Steuerung in der offenen Wirkungskette oder von einer *Steuerung*. Das betrachtete dynamische System heißt *Steuerstrecke*, die steuernde Einheit *Steuereinrichtung*.

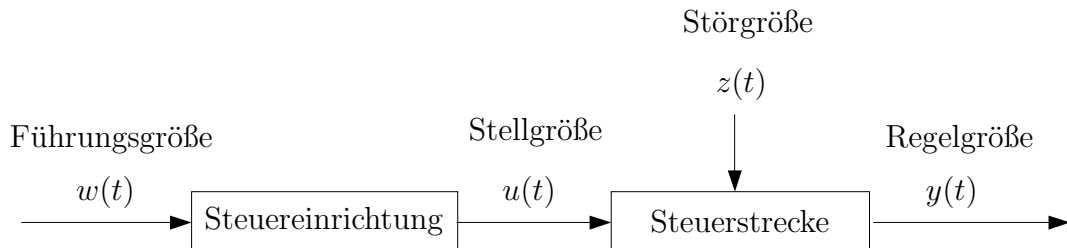


Bild 1.10: Grundstruktur einer Steuerung

Das Ziel $y(t) = w(t)$ kann mit einer Steuerung nur dann erreicht werden, wenn zwei Bedingungen erfüllt sind: Zum einen müssen die dynamischen Eigenschaften der Steuerstrecke vollständig bekannt sein und zum anderen dürfen weder innere noch äußere Störungen auf die Steuerstrecke einwirken. Da die Steuereinrichtung keine Informationen über die Störgröße erhält, kann sie auf die Störung nicht reagieren. Bei einer Steuerung müssen alle Einflußgrößen, denen entgegengewirkt werden soll, gemessen werden (*Störgrößenaufschaltung*), dafür treten bei einer Steuerkette keinerlei Stabilitätsprobleme auf.

Aus den bisherigen Betrachtungen wird deutlich, daß die Verwendung einer Regelung gegenüber der Steuerung zwei entscheidende Vorteile besitzt. Durch eine Regelung kann das Ziel $y(t) \approx w(t)$ auch dann erreicht werden, wenn

- die Regelstrecke durch nichtmeßbare Störungen beeinflusst wird und
- wenn die dynamischen Eigenschaften der Regelstrecke nicht genau bekannt sind oder sich zeitlich verändern.

Die erste Eigenschaft einer Regelung wird als *Störkompensation*, die zweite als *Robustheit* bezeichnet.

Um die Steuerung in der offenen Wirkungskette von der im geschlossenen Wirkungskreis zu unterscheiden, wird im weiteren zwischen *Steuerkette* und *Regelkreis* unterschieden. Diese Unterscheidung entspricht den Begriffen *feedforward control* bzw. *feedback control* im englischen Sprachraum, wobei *control* sowohl mit Steuerung als auch mit Regelung übersetzt werden kann.

1.7 Lösungsweg für Regelungsaufgaben

Bei der Lösung einer Regelungsaufgabe können zwei Phasen unterschieden werden:

- **Vorbereitungsphase:** Das Regelgesetz wird ermittelt und durch eine Funktionseinheit technisch realisiert.
- **Arbeitsphase:** Der gerätetechnisch realisierte Regler bestimmt kontinuierlich aus dem aktuellen Wert der Regelabweichung $e(t)$ den aktuellen Wert $u(t)$ der Stellgröße.

Gegenstand dieser Vorlesung ist das Problem, für eine gegebene Regelungsaufgabe ein geeignetes Reglergesetz zu bestimmen bzw. gegebenenfalls zu erkennen, daß die Regelungsaufgabe unter Beachtung aller Randbedingungen nicht lösbar ist. Die gerätetechnische Realisierung des Reglergesetzes wird nicht betrachtet.

Die Vorbereitungsphase läßt sich dann in folgende Schritte aufteilen:

- **Modellbildung:** Für ein gegebenes dynamisches System werden mathematische Modelle (z.B. lineare Differentialgleichungen) aufgestellt, die das reale System vereinfacht, aber doch ausreichend genau beschreiben.
- **Analyse der Regelstrecke:** Hier geht es um Aussagen der Lösbarkeit der Regelungsaufgabe. Dazu zählen Antworten auf die Fragen, wie das stationäre und das Übergangsverhalten des geschlossenen Regelkreises durch die Wahl des Reglers beeinflußt werden und welche Regelgüte erreicht werden kann bzw. welche Kompromisse gemacht werden müssen.
- **Auswahl der Reglerstruktur:** Ausgehend von dem Ergebnis der Systemanalyse wird hier die Struktur des Reglers festgelegt (Reglerordnung, Art und Anzahl der Meß- und Stellgrößen usw.).
- **Festlegung der Reglerparameter:** Die Parameter des gewählten Reglers werden mit Hilfe entsprechender Reglerentwurfverfahren so festgelegt, daß die in der Regelungsaufgabe vorgegebenen Güteanforderungen erfüllt werden.
- **Erprobung des Reglers in der Simulation:** Anhand des mathematischen Modells wird mit Hilfe von Simulationsprogrammen wie z.B. Matlab/Simulink überprüft, ob der geschlossene Regelkreis die in der Regelungsaufgabe gestellten Güteanforderungen erfüllt.

Den prinzipiellen Lösungsweg zeigt auch Bild 1.11, in dem zwischen der Prozezebene und der Modellebene unterschieden wird. Ausgangs- und Endpunkt für Regelungsaufgaben ist die Prozezebene mit der gegebenen realen Regelstrecke und einem Regler als neues Gerät, der in Betrieb genommen werden soll. Demgegenüber wird die Systemanalyse und der Reglerentwurf, d.h. die Bestimmung des Reglergesetzes auf der Modellebene durchgeführt.

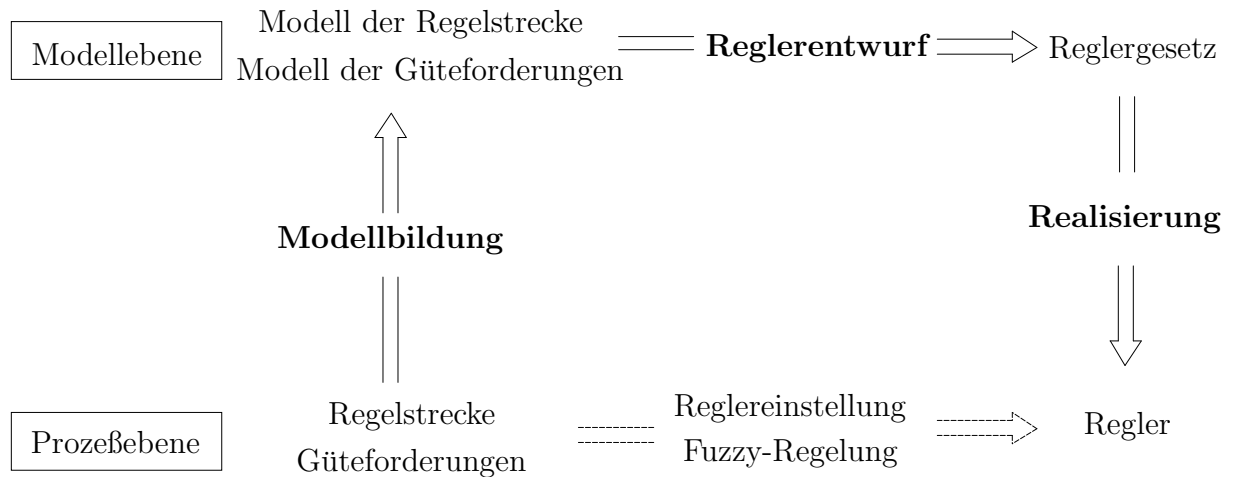


Bild 1.11: Prinzipielle Vorgehensweise zur Lösung von Regelungsaufgaben

Ein alternativer Weg für die Lösung von Regelungsaufgaben ist in Bild 1.11 durch den gestrichelten Pfeil auf der Prozeßebene eingetragen. Bei diesem Lösungsweg wird versucht, ohne eine aufwendige Modellbildung auszukommen und den Regler (z.B. einen PID-Regler) direkt am Prozeß einzustellen. Dieser Lösungsweg wird auch bei der sogenannten Fuzzy-Regelung beschritten, bei der ein Regelgesetz in Form von Regeln vorliegt und mit Hilfe eines Verfahrens zur Verarbeitung unscharfer Regeln realisiert wird.

2 Modellbildung dynamischer Systeme

2.1 Einleitung

Mathematische Systemmodelle sind im allgemeinen die Ausgangsbasis für die Analyse und Synthese eines Regelsystems sowie für Simulationsstudien mit Hilfe von Simulationsprogrammen. Insbesondere ist hier die Modellierung des dynamischen Verhaltens eines Systems gemeint.

Das dynamische Verhalten eines Systems hat seine Ursachen in den im System vorhandenen *Speichern* für *Masse* und/oder *Energie* und/oder *Information*. Das Laden und Entladen dieser Speicher verursacht die *Trägheit* technisch/physikalischer Systeme, die sich darin bemerkbar macht, daß die *Systemwirkung verzögert* auf *Systemursachen* folgt.

Die Verzögerungen eines Systems lassen sich auf verschiedene Weise qualitativ und quantitativ erfassen.

- a) **Experimentell:** durch Beobachtung und Messung der Antwort des Systems auf geeignete **Testsignale**.
- b) **Analytisch:** durch Aufstellen der **Übertragungsgleichungen** (Systemgleichungen) unter Verwendung bekannter physikalischer und/oder chemischer Gesetze.

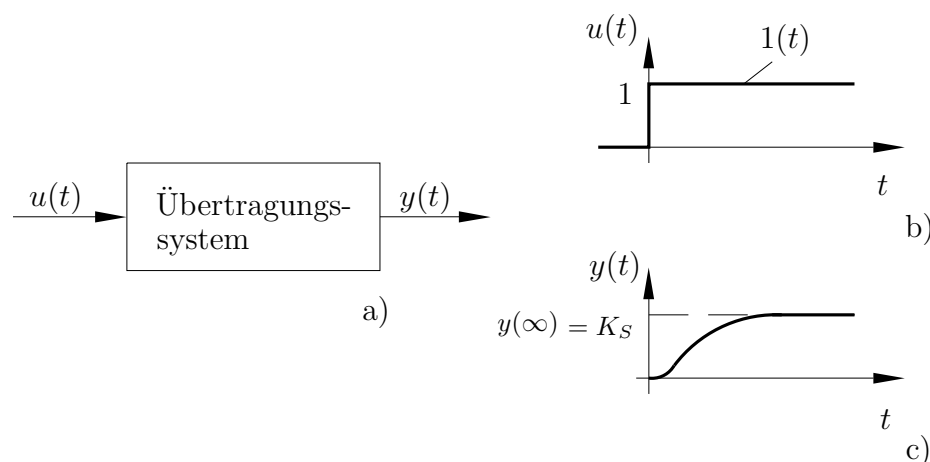


Bild 2.1: Übertragungsverhalten eines linearen Systems

- a) Blockschaltbild
- b) Sprungerregung
- c) Sprungantwort

2.2 Linearisierung nichtlinearer Systeme

Die mathematische Behandlung der Analyse und Synthese von Regelungssystemen wird deutlich einfacher, wenn alle Regelkreisglieder – zumindest in 1. Näherung – durch ein

Modell mit linearem Übertragungsverhalten beschreibbar sind.

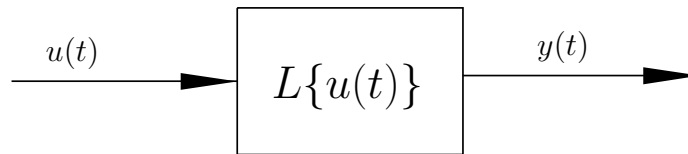


Bild 2.2: Lineares Übertragungssystem $L\{u(t)\}$

Definition 2.1

Ein System heißt **linear**, wenn für die Ursache–Wirkung–Beziehung zwischen Ein– und Ausgang das **Superpositionsprinzip** gültig ist. □

Die vorstehende Definition kann auch mathematisch unter Verwendung des Formelzeichens $L\{\cdot\}$ für einen linearen Operator so notiert werden:

Definition 2.2

Ein System ist dann und nur dann linear, wenn aus

$$y(t) = L\{u(t)\} \tag{2.1}$$

mit
$$u(t) = \sum_{\nu=1}^r a_{\nu} u_{\nu}(t) \tag{2.2}$$

folgt:
$$y(t) = \sum_{\nu=1}^r a_{\nu} y_{\nu}(t) \tag{2.3}$$

mit
$$y_{\nu}(t) = L\{u_{\nu}(t)\} . \tag{2.4}$$

□

Aufgrund der Definition der linearen Systeme durch das Superpositionsgesetz ergibt sich unmittelbar, daß alle Systeme, die durch **gewöhnliche lineare Differentialgleichungen** beschrieben werden, linear sind.

Diese Grundvorlesung *Steuer- und Regelungstechnik* behandelt ausschließlich die **Theorie linearer Systeme**. Da letztlich alle Systeme der Natur und Technik nichtlinearen Ursache–Wirkungsbeziehungen folgen, muß bei der mathematischen Behandlung zunächst versucht werden, sich auf kleine Abweichungen der Signale um feste Arbeitspunkte zu beschränken.

Die Art der *Linearisierung* ist vom jeweiligen nichtlinearen Charakter des Systems abhängig. Es kann daher zwischen der "Linearisierung einer nichtlinearen Differentialgleichung" und der "Linearisierung einer statischen Kennlinie" unterschieden werden. Die Linearisierung

nichtlinearer Differentialgleichungen ist bereits im Modul "Technische Mechanik III" behandelt worden, so daß hier nur noch der Fall der "Linearisierung einer statischen Kennlinie" betrachtet wird. Solche nichtlinearen Kennlinien (vgl. Bild 1.7) kommen bei regelungstechnischen Aufgabenstellungen häufig vor.

Im folgenden wird immer nur mit den Abweichungsgrößen (kleine Buchstaben) um feste, vorgegebene Arbeitspunkte A gearbeitet. Die Werte der Variablen am Arbeitspunkt werden durch den Index „0“ gekennzeichnet (z. B. U_0).

Definition 2.3

Abweichungsgrößen um einen Arbeitspunkt werden wie folgt festgelegt:

$$\text{Regelgröße} \quad y[\cdot] = \Delta Y[\cdot] = (Y - Y_0)[\cdot] \tag{2.5}$$

$$\text{Stellgröße} \quad u[\cdot] = \Delta U[\cdot] = (U - U_0)[\cdot] \tag{2.6}$$

$$\text{Störgröße} \quad z[\cdot] = \Delta Z[\cdot] = (Z - Z_0)[\cdot] \tag{2.7}$$

(Die eckigen Klammern deuten die bei Zahlenwertgleichungen notwendigen Angaben der physikalischen Dimension an.) □

Bei der systemtheoretischen Untersuchung ist es zweckmäßig, mit dimensionslosen, normierten Größen zu arbeiten. Zur Normierung bieten sich dann beispielsweise Maximalwerte der Variablen oder die Werte der betrachteten Arbeitspunkte an. Bei Normierung auf den Arbeitspunkt erhalten wir dann für $Y_0, U_0, Z_0 \neq 0$:

$$\text{Regelgröße} \quad y = \frac{\Delta Y}{Y_0} = \frac{Y - Y_0}{Y_0} \tag{2.8}$$

$$\text{Stellgröße} \quad u = \frac{\Delta U}{U_0} = \frac{U - U_0}{U_0} \tag{2.9}$$

$$\text{Störgröße} \quad z = \frac{\Delta Z}{Z_0} = \frac{Z - Z_0}{Z_0} \tag{2.10}$$

Wir unterscheiden

- a) graphische Linearisierung (Bild 2.3)
- b) analytische Linearisierung (Gln. 2.11, 2.12, 2.13 und 2.14)

Zur *Zwangslinearisierung* der Systembeschreibung werden die Kennlinien durch Tangenten an die Kennlinien im Arbeitspunkt ersetzt. Das bedeutet für die analytische Beschreibung des nichtlinearen Zusammenhangs

$$Y = f(U, Z_1, Z_2, \dots) , \tag{2.11}$$

daß dieser in der Umgebung des Arbeitspunktes A durch den linearen Ausdruck

$$y = K_u \cdot u + K_1 z_1 + K_2 z_2 + \dots \tag{2.12}$$

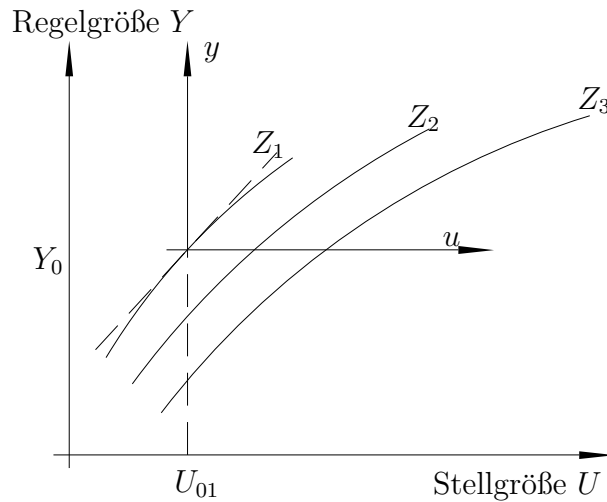


Bild 2.3: Zur Linearisierung von statischen Kennlinien

ersetzt wird. Die Koeffizienten $K_i, i \in \{u, 1, 2, \dots\}$ werden hierbei dadurch gewonnen, daß die linearen Terme der Taylorreihenentwicklung der vorgegebenen nichtlinearen Funktion verwendet werden. Wir bilden also zu Gl. (2.11) die Taylorreihe

$$y = \left. \frac{\partial Y}{\partial U} \right|_A \cdot u + \left. \frac{\partial Y}{\partial Z_1} \right|_A \cdot z_1 + \left. \frac{\partial Y}{\partial Z_2} \right|_A \cdot z_2 + \dots \quad (2.13)$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert somit die gesuchten Konstanten (Koeffizienten K_i) in Gl. (2.12) zu:

$$K_u = \left. \frac{\partial Y}{\partial U} \right|_A ; K_1 = \left. \frac{\partial Y}{\partial Z_1} \right|_A ; K_2 = \left. \frac{\partial Y}{\partial Z_2} \right|_A ; \dots \quad (2.14)$$

Beispiel: Der Zusammenhang zwischen Ausgangsgröße Y und den Eingangsgrößen U und Z eines nichtlinearen Systems nach Bild 2.4 sei gegeben zu

$$Y = f(U, Z) = \frac{Z^2}{U} + C \quad .$$

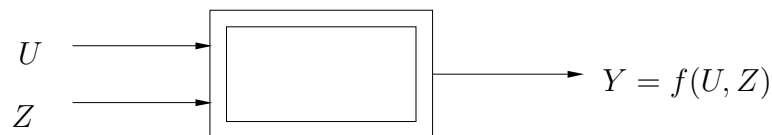


Bild 2.4: Nichtlineares System

Es wird eine lineare Beziehung für den durch Z_0 und U_0 charakterisierten Arbeitspunkt gesucht. Mit Gl. (2.13) erhalten wir:

$$y = \left. \frac{\partial f(U, Z)}{\partial U} \right|_{U_0, Z_0} \cdot u + \left. \frac{\partial f(U, Z)}{\partial Z} \right|_{U_0, Z_0} \cdot z = -\frac{Z_0^2}{U_0^2} u + \frac{2Z_0}{U_0} z \quad .$$

Der Ausdruck

$$K_S = \left. \frac{\partial Y}{\partial U} \right|_{U=U_0} \quad (2.15)$$

eines Systems mit der Eingangsgröße U und der Ausgangsgröße Y beschreibt die statische Verstärkung des Systems. Damit kann das statische Übertragungsverhalten für kleine Signalamplituden um den Arbeitspunkt zu

$$y = K_S u \quad (2.16)$$

angegeben werden.

2.3 Testsignale der Regelungstechnik

Einige für die experimentelle Modellierung (Identifikation) von dynamischen Übertragungssystemen wesentlichen Testsignale und die zugehörigen Systemantworten werden im weiteren in allgemeiner Form vorgestellt.

a) Die Sprungfunktion

Die in der Praxis am häufigsten benutzte Testfunktion ist die sogenannte Sprungfunktion (Bild 2.5). Diese Sprungfunktion, die zum Zeitpunkt $t = 0$ auftritt, ist analytisch erklärt zu:

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \forall t < 0 \\ 1 & \forall t \geq 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

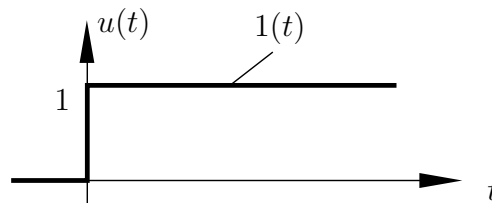


Bild 2.5: Darstellung der Sprungfunktion

Soll die Sprungfunktion, die in der Praxis im allgemeinen genügend genau und auch einfach realisiert werden kann, statt zum Zeitpunkt $t = 0$ zu einem Zeitpunkt $t = t_0$ einwirken, dann wird dies entsprechend Bild 2.6a notiert und definiert.

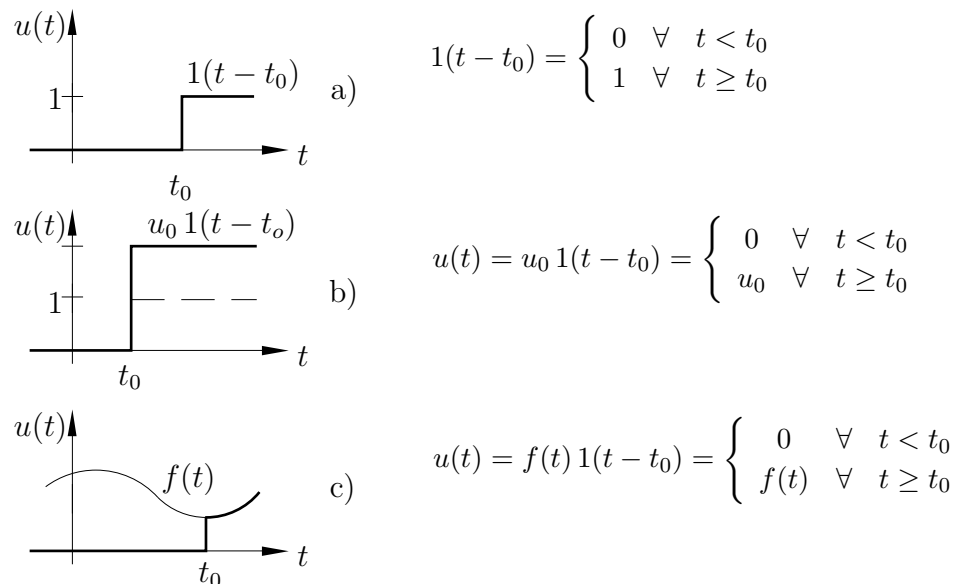


Bild 2.6: a) Sprungfunktion zum Zeitpunkt $t = t_0$ b) Sprungfunktion der Höhe (Amplitude) u_0 c) geschaltete Zeitfunktion

Ist ein Sprung der Höhe u_0 erwünscht, dann wird die Sprungfunktion mit der *Amplitude* u_0 multipliziert (Bild 2.6b). Schließlich kann eine beliebige Zeitfunktion $f(t)$ mittels der Sprungfunktion zum Zeitpunkt $t = t_0$ auf- oder „ein“-geschaltet werden (Bild 2.6c). (In der Literatur wird auch die Bezeichnung $\sigma(t)$ für die Sprungfunktion verwendet.)

Definition 2.4 Ein dynamisches System sei zu einem Zeitpunkt $t = t_0$ energiefrei, d.h. alle Anfangsbedingungen der beschreibenden Differentialgleichung sind Null. Die Systemantwort des durch die Einheitssprungfunktion $u(t) = 1(t)$ erregten Systems heißt **Sprungantwort** oder Übergangsfunktion $h(t)$. \square

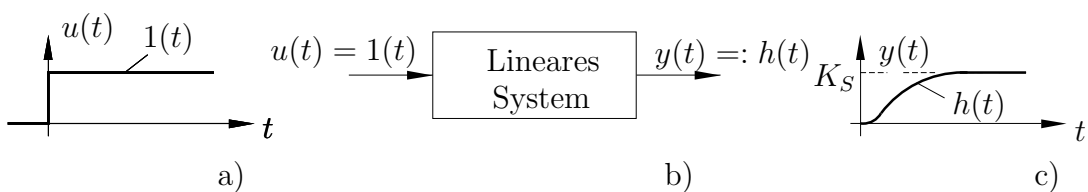


Bild 2.7: Sprungantwort eines linearen Systems

In Bild 2.7c ist die typische Sprungantwort eines linearen Systems dargestellt. Für stabile Systeme nähert sich die Übergangsfunktion $h(t)$ für $t \rightarrow \infty$ einem Endwert $K_S = h(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$, der die statische Verstärkung des Systems beschreibt und auch als *Systemverstärkung* bezeichnet wird. Im weiteren wird die Systemverstärkung manchmal auch nur mit K abgekürzt.

Wirkt die Sprungfunktion nicht zum Zeitpunkt $t = 0$, sondern bei $t = t_0$, dann ist entsprechend auch die Sprungantwort um t_0 Zeiteinheiten verschoben und wir halten dies so fest:

$$u(t) = u_0 1(t - t_0) \quad \Rightarrow \quad y(t) = u_0 h(t - t_0) \quad . \quad (2.18)$$

b) **Dirac'sche Deltafunktion**

Für die theoretische Untersuchung dynamischer Systeme ist es sinnvoll, eine impulsförmige Erregung, die sogenannte **Impulsfunktion** einzuführen. Für die Praxis geht man von einem endlichen Impuls aus (Bild 2.8):

$$u(t) = \frac{1}{\alpha} [1(t) - 1(t - \alpha)] \quad . \quad (2.19)$$

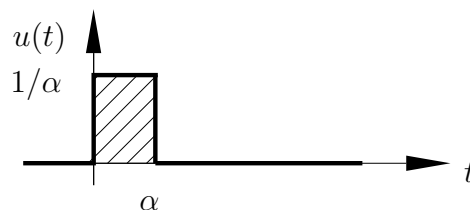


Bild 2.8: Rechteckimpuls der Breite α mit Höhe $1/\alpha$ und der normierten Impulsfläche 1

Der idealisierte Impuls in Form des Dirac'schen Deltaimpulses kann als Grenzfall mit $\alpha \rightarrow 0$ des realen Impulses aus Bild 2.8 gedacht werden. Der Deltaimpuls ist als verallgemeinerte Funktion – eine sogenannte Distribution – und nur durch seine „Ausblendeigenschaft“ definiert:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)} \quad (2.20)$$

mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (2.21)$$

und kann symbolisch entsprechend Bild 2.9 dargestellt werden.

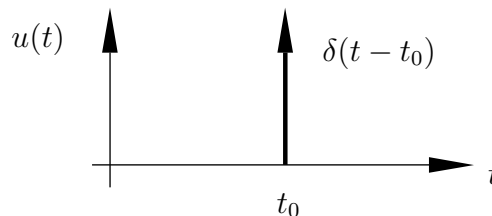


Bild 2.9: Symbolische Darstellung des Dirac'schen Deltaimpulses

In der Praxis ist der Deltaimpuls nicht realisierbar, doch ist er für die analytische mathematische Behandlung von impulsförmigen Vorgängen bei dynamischen Systemen von großer Bedeutung. Denn wird ein lineares dynamisches System mit dem Dirac-Impuls erregt (gedacht), dann antwortet es mit der Impulsantwort (Bild 2.10). Eine Näherung der Impulsantwort kann auch bei realen Systemen gemessen werden.

Definition 2.5

Die Systemantwort eines Systems bei Erregung durch $\delta(t)$ heißt: **Impulsantwort** oder Gewichtsfunktion $g(t)$. □

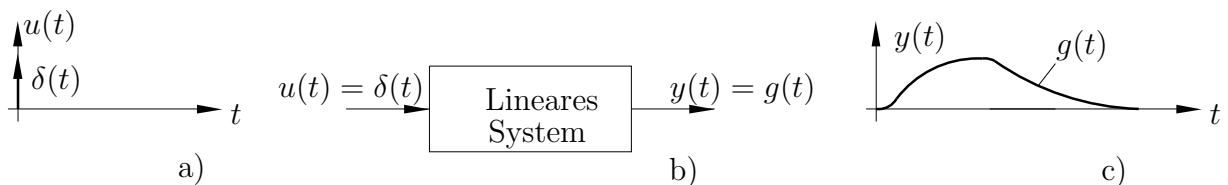


Bild 2.10: a) Dirac-Impuls als Eingangssignal b) Blockschaltbild eines linearen Systems c) typischer Verlauf einer Gewichtsfunktion

Wirkt auf das System zum Zeitpunkt $t = t_0$ ein Dirac-Impuls der normierten Fläche u_0 , ist also $u(t) = u_0 \delta(t - t_0)$, dann lautet die Systemantwort wegen der vorausgesetzten Linearität und Zeitinvarianz

$$y(t) = u_0 g(t - t_0) \quad . \quad (2.22)$$

Zwischen der Sprungfunktion $1(t)$ und der Dirac-Impuls-Funktion $\delta(t)$ besteht die Beziehung:

$$1(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \quad (2.23)$$

bzw. im Sinne der Distributionentheorie

$$\delta(t) = \frac{\partial}{\partial t} 1(t) \quad . \quad (2.24)$$

Entsprechend gilt zwischen der Gewichtsfunktion $g(t)$ und der Sprungantwort $h(t)$ des Systems die Beziehung

$$\boxed{g(t) = \frac{\partial h(t)}{\partial t}} \quad . \quad (2.25)$$

c) Die Rampenfunktion

Im Bereich der dynamischen Untersuchung von Folgeregelkreisen (z.B. bei Werkzeugmaschinen, Schweißrobotern) wird die Rampenfunktion eingesetzt, die als Integral der Sprungfunktion definiert werden kann (Bild 2.11).

$$u(t) = \int_{-\infty}^t 1(\tau) d\tau = 1(t) t$$

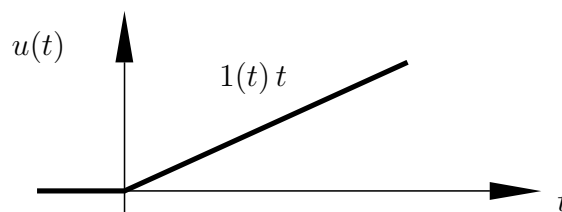


Bild 2.11: Rampenfunktion

d) **Die harmonische Erregung**

Die Modellierung linearer Systeme mit Hilfe harmonischer Erregungen wird im MA-Modul "Regelungstechnik" im Zusammenhang mit der Frequenzgangdarstellung ausführlich behandelt. Unter einer harmonischen Erregung versteht man ein Testsignal, das beispielsweise wie folgt definiert ist (Bild 2.12):

$$u(t) = u_0 \sin \omega_0 t . \tag{2.26}$$

Dieses *reelle* harmonische Signal kann auch mittels der *Euler*-Beziehung:

$$e^{j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t = \operatorname{Re}\{e^{j\omega_0 t}\} + j \operatorname{Im}\{e^{j\omega_0 t}\} \tag{2.27}$$

durch den Imaginärteil einer komplexen Funktion beschrieben werden:

$$u(t) = u_0 \sin \omega_0 t = u_0 \operatorname{Im}\{e^{j\omega_0 t}\} , \tag{2.28}$$

eine Schreibweise, die sich weiter unten bei der Einführung des *Frequenzganges* eines linearen Systems als nützlich erweisen wird.

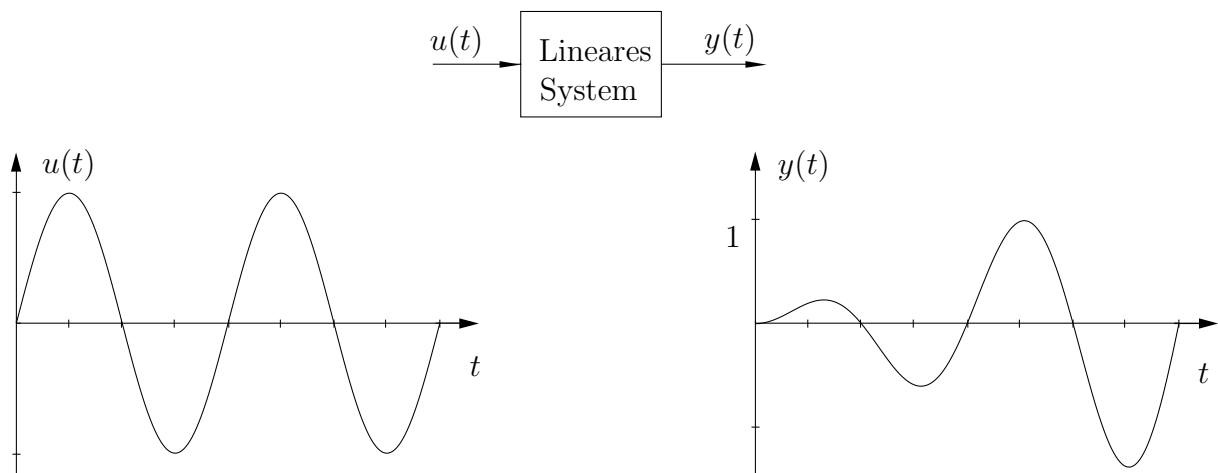


Bild 2.12: Harmonische Erregung eines linearen Systems

Die Antwort eines linearen Systems auf die harmonische Erregung setzt sich zusammen aus dem „flüchtigen“ Anteil des Einschwingvorganges und dem stationären Anteil im eingeschwungenen Zustand, der eine das dynamische Systemverhalten charakterisierende, von der Frequenz ω_0 abhängige Phasenverschiebung und Amplitudenänderung gegenüber dem Eingangssignal aufweist.

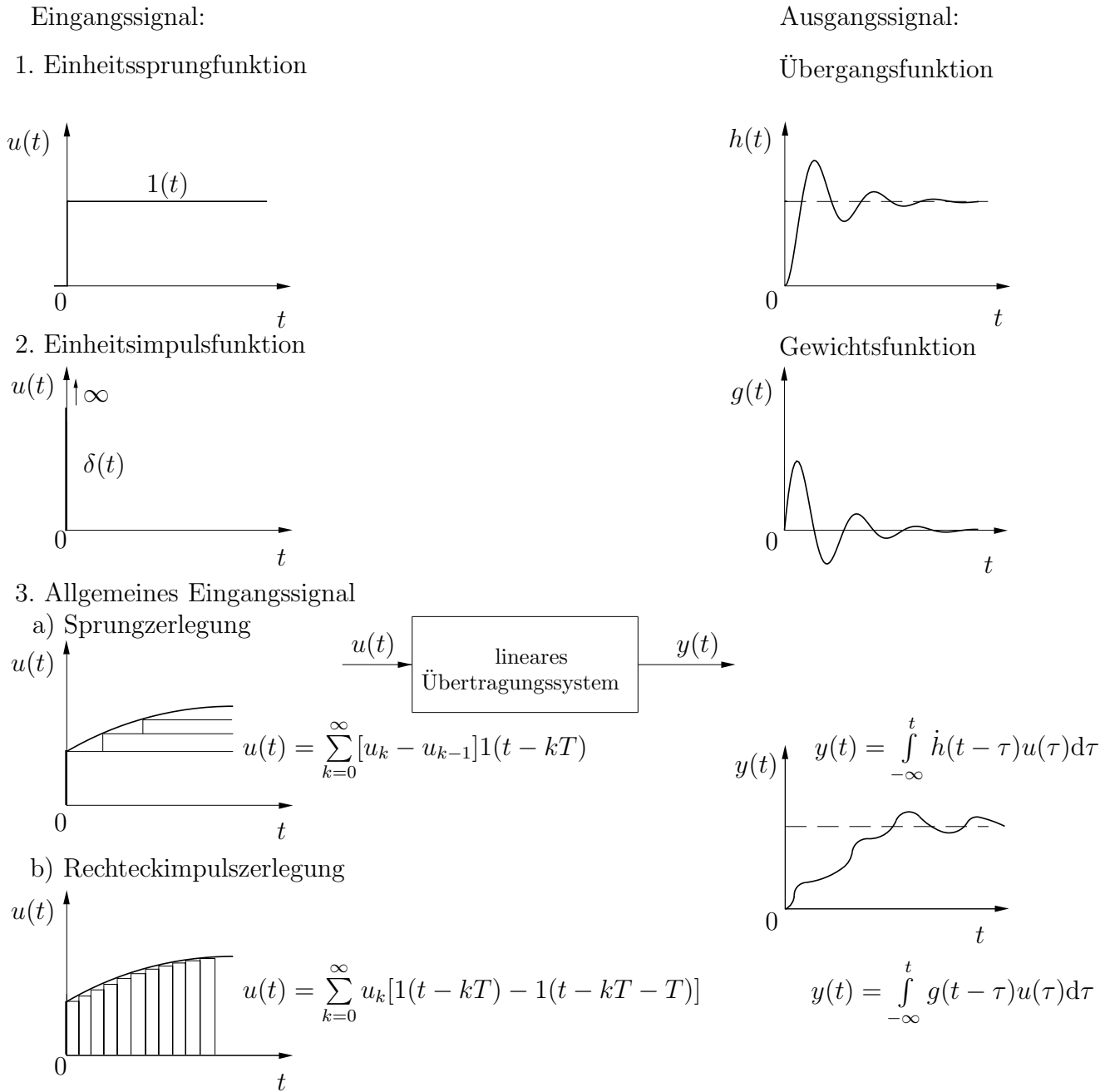


Bild 2.13: Zur Darstellung des Faltungsintegrals

2.4 Das Faltungsintegral

Vorstehend waren die Systemantworten linearer Systeme auf spezielle Testsignale als Eingangssignal besprochen worden. Beliebige technisch sinnvolle Eingangssignale kann man als eine Folge von Sprungfunktionen darstellen (Bild 2.13).

Im Grenzfall beliebig feiner Unterteilung der Sprunghöhen oder beliebig schmaler Rechteckimpulse wird diese Darstellung exakt. Für aperiodische Signale, – d. h. nicht periodi-

sche Signale – ist die Sprungfunktion ein ähnliches „Aufbauelement“ wie die harmonischen Signale bei der Fourierreihendarstellung periodischer Signale. Ist die Gewichtsfunktion $g(t)$ eines linearen Systems bekannt, dann kann die Systemantwort $y(t)$ für ein beliebiges Eingangssignal $u(t)$ mittels des *Faltungintegrals* (abgekürzt durch den Operator $*$) dargestellt werden:

$$y(t) = g(t) * u(t) = \int_0^t g(t - \tau) u(\tau) d\tau \quad (2.29)$$

oder mit der Substitution $(t - \tau) = v$:

$$y(t) = \int_0^t g(v) u(t - v) dv \quad . \quad (2.30)$$

Aus Gleichung (2.30) folgt, daß sich die Ausgangsgröße zu einem festen Zeitpunkt t aus der Integration der mit $g(v)$ gewichteten Eingangsgröße $u(t - v)$ ergibt. Aus dieser Tatsache begründet sich auch der Begriff *Gewichtsfunktion* für $g(t)$. Dies belegt, daß sowohl die Gewichtsfunktion $g(t)$ als auch die Übergangsfunktion $h(t)$ für die Beschreibung linearer Systeme eine große Bedeutung haben, da sie die gesamte Information über deren dynamisches Verhalten enthalten.

2.5 Beschreibung durch Differentialgleichungen

Bisher war das Übertragungsverhalten von dynamischen Systemen nur qualitativ angedeutet worden. Insbesondere wurde im vorstehenden Abschnitt 2.3 dargestellt, wie durch Beobachtung des Ein-/Ausgangssignalverhaltens für spezielle Testsignale Erkenntnisse über das dynamische Verhalten von Systemen gewonnen werden können. In diesem Abschnitt soll nun eine mathematisch analytische Beschreibung mittels Differentialgleichungen eingeführt werden. Auf der Grundlage der als bekannt vorausgesetzten Grundgesetze der Physik wird damit eine quantitative Beschreibung der Systemdynamik ermöglicht.

Da alle Systeme in der Natur und Technik mit **Trägheit** behaftet sind, folgen diese Systeme einem erregenden Eingangssignal nicht spontan, sondern die Systemantwort ist

- a) verzögert
- b) verformt.

Wie zuvor bereits erläutert hat die Systemträgheit ihre Ursache in der Speicherung von Masse, Energie oder Information. Die Methoden der Systemtheorie erlauben eine einheitliche Charakterisierung des dynamischen Verhaltens technischer und physikalischer Systeme, indem der **Ladezustand** von Speichern und die **Ladungsänderung** durch äußere Einwirkung mathematisch mittels Differentialgleichungen beschrieben wird. Es werden *Ursache-/Wirkung*-Beziehungen aufgestellt, die mathematische Modelle des zu beschreibenden Systems sind. Hierbei werden

- a) **Übertragungsmodelle** und
- b) **Zustandsmodelle**

unterschieden, die im weiteren ausführlicher besprochen werden.

2.5.1 Dynamische Systeme 1. Ordnung

In diesem Abschnitt werden zunächst die Systeme behandelt, die nur einen Speicher (für *Energie*, *Information* oder *Masse*) haben. Dabei werden in diesem Kurs nahezu ausschließlich **konzentrierte Speicher** betrachtet.

Definition 2.6

Ein Speicher für Masse und/oder Energie heißt *konzentrierter* (oder Punkt-)Speicher, wenn die räumliche Ausdehnung des Speichers keinen (oder nur einen vernachlässigbaren) Einfluß auf das dynamische Verhalten hat. □

Es werden nun einige wichtige dynamische Systeme mit einem Speicher für potentielle oder kinetische Energie besprochen.

- a) **Pneumatisches Widerstand-/Speicher-System**

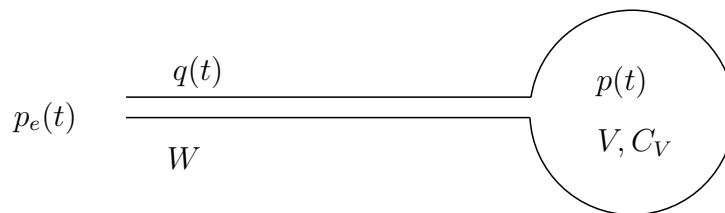


Bild 2.14: Pneumatisches Widerstand-/Speicher-System

In Bild 2.14 bedeuten:

Druck	$p(t)$	[Pa]	}	(2.31)
Durchfluß (Volumenstrom, gemessen an einer Durchtrittsebene)	$q(t)$	[m ³ /s]		
Strömungswiderstand	W	$\left[\frac{\text{Pa}}{\text{m}^3/\text{s}} \right]$		
Volumen	V	[m ³]		
Speicherkapazität	C_V	[m ³ /Pa]		

(Pa =: Pascal, 1Pa = 1N/m²) .

Wird wirbelfreie, laminare Strömung in der widerstandsbehafteten Leitung in dem Geräteplan 2.14 vorausgesetzt, dann gilt dieser, dem *Ohm'schen Gesetz* der Elektrotechnik analoge, Zusammenhang:

$$\text{Durchfluß} = \frac{\text{Druckgefälle}}{\text{Strömungswiderstand}} \quad (2.32)$$

$$q(t) = \frac{1}{W} [p_e(t) - p(t)] \quad . \quad (2.33)$$

Ferner ist die zeitliche Änderung $\dot{p}(t)$ des Druckes in dem Behälter, für kleine Änderungen um einen Arbeitspunkt und bei konstanter Temperatur, proportional dem Durchfluß und umgekehrt proportional der Speicherkapazität

$$\dot{p}(t) = \frac{1}{C_V} q(t) \quad . \quad (2.34)$$

Dabei ist C_V die Speicherkapazität eines Behälters mit dem Volumen V :

$$C_V = \frac{V}{\rho \cdot R_i \cdot \Theta} \quad , \quad (2.35)$$

$$\text{mit } \rho = \frac{m}{V} \frac{[\text{kg}]}{[\text{m}^3]} : \text{Dichte des Gases} \quad (2.36)$$

$$R_i : \text{spezielle Gaskonstante [J/kg} \cdot \text{K]} \quad (2.37)$$

$$\Theta : \text{absolute Temperatur [K]} \quad . \quad (2.38)$$

Aus (2.33) und (2.34) folgt:

$$C_V W \dot{p}(t) + p(t) = p_e(t) \quad . \quad (2.39)$$

Wird abkürzend

$$T = C_V W \text{ [s]} \quad (2.40)$$

sowie $y(t) = p(t)$ und $u(t) = p_e(t)$ gesetzt, ergibt sich die Differentialgleichung des PT_1 -Gliedes (Proportionalübertragungsglied mit einer Verzögerung –Zeitkonstante– 1. Ordnung):

$$T \dot{y}(t) + y(t) = u(t) \quad , \text{ mit } y(t_0) = y_0 \quad . \quad (2.41)$$

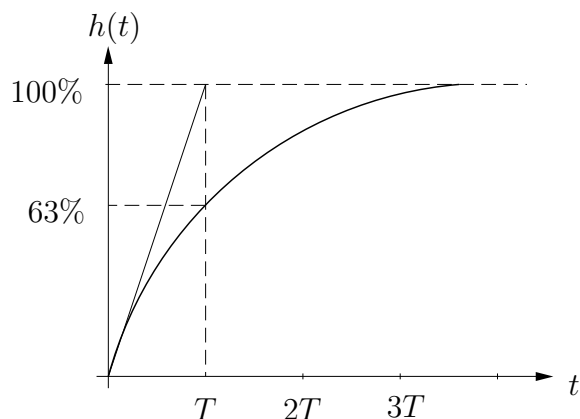


Bild 2.15: Zeitlicher Verlauf der Sprungantwort (2.42) des Systems aus Bild 2.14 mit $h(T) \approx 63\%$, $h(2T) \approx 86\%$ und $h(3T) \approx 95\%$

Bei sprungförmiger Erregung

$$u(t) = 1(t)$$

antwortet das System mit der Sprungantwort $y(t) := h(t)$:

$$h(t) = [1 - e^{-t/T}] 1(t) \quad , \quad (2.42)$$

die in Bild 2.15 dargestellt ist.

Mit (2.24) erhalten wir die Impulsantwort des Systems in Bild 2.14 zu (Bild 2.16):

$$g(t) = \frac{d}{dt}h(t) = \frac{1}{T}e^{-t/T} 1(t) \quad (2.43)$$

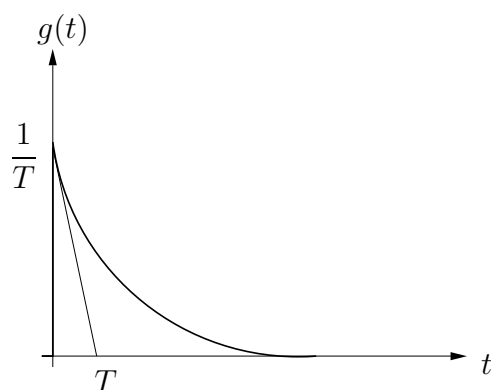


Bild 2.16: Gewichtsfunktion (Impulsantwort) des PT_1 -Systems

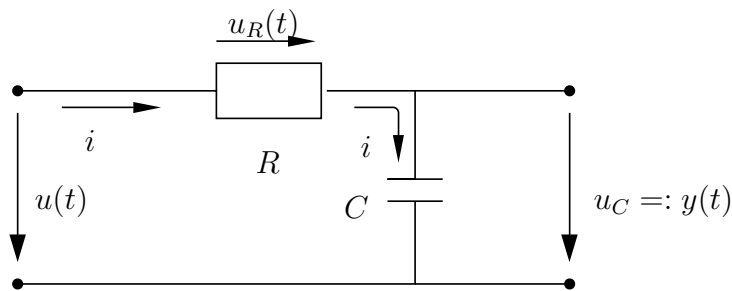


Bild 2.17: RC-Netzwerk, Verzögerungsglied 1. Ordnung

b) Elektrisches RC-Glied

Mit den Kirchhoffschen Gesetzen der Elektrotechnik läßt sich das Eingangs-Ausgangsverhalten eines RC-Gliedes nach Bild 2.17 in einfacher und letztlich zu a) analoger Weise analysieren:

$$u(t) = u_R(t) + u_C(t) \quad (2.44)$$

$$i(t) = \frac{1}{R}u_R(t) = C \frac{d}{dt}u_C(t) . \quad (2.45)$$

In dieser Anordnung übernimmt der Kondensator die Rolle des Energiespeichers. Wird auch hier als Ausgangssignal die Größe, die ein Maß für die gespeicherte potentielle Energie ist, gewählt als

$$y(t) := u_C(t) ,$$

dann ist wieder die normierte Differentialgleichung 1. Ordnung als Modell eines Widerstand-/Speichergliedes 1. Ordnung gefunden:

$$RC \dot{y}(t) + y(t) = u(t) , \quad (2.46)$$

bzw.

$$T \dot{y}(t) + y(t) = u(t) , y(t_0) = y_0 \quad (2.47)$$

mit der Zeitkonstanten

$$T = R \cdot C . \quad (2.48)$$

Auch dieses System hat die gleichen Sprung- bzw. Impulsantworten Gln. (2.42) bzw. (2.43), die für das pneumatische PT_1 bestimmt wurden.

Für $u(t) = 1(t)$ lautet die Sprungantwort (Übergangsfunktion):

$$y(t) = h(t) = [1 - e^{-t/T}] 1(t) .$$

In einer Übergangsfunktion eines Systems 1. Ordnung findet man die Zeitkonstante T über die Tangente im Ursprung der Übergangsfunktion und aus $h(t)|_{t \rightarrow \infty} = K_S$ die Systemverstärkung. Es ist üblich, die Übergangsfunktion eines Systems in einem Blockschaltbild innerhalb eines Signalflußplans einzutragen (Bild 2.18).

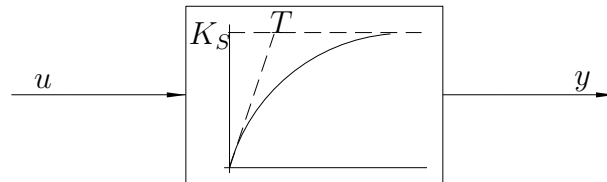


Bild 2.18: Blockschaltbild des Systems 1. Ordnung

c) **RL-System**

Auch das RL-Netzwerk in Bild 2.19 hat das dynamische Verhalten eines PT_1 -Systems. Hier übernimmt die Spule die Energiespeicherung. Aus den Kirchhoff'schen Beziehungen folgt:

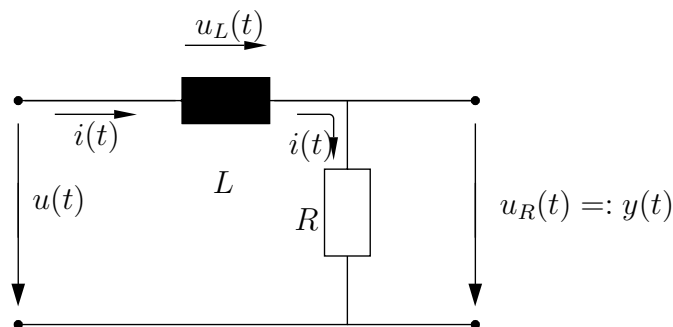


Bild 2.19: RL-Netzwerk

$$u(t) = u_L(t) + u_R(t) \tag{2.49}$$

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad ; \quad u_R(t) = R \cdot i(t) \tag{2.50}$$

$$\frac{L}{R} \dot{u}_R(t) + u_R(t) = u(t) \tag{2.51}$$

$$T \dot{y}(t) + y(t) = u(t) \tag{2.52}$$

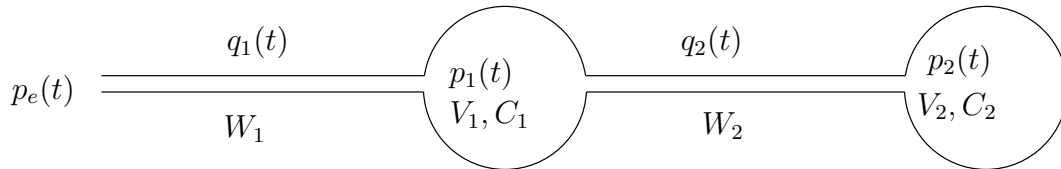
$$\text{mit } T = \frac{L}{R} . \tag{2.53}$$

2.5.2 Systeme zweiter Ordnung

Dynamische Systeme mit zwei Speichern werden Systeme 2. Ordnung genannt. Mittels Methoden der Netzwerke (Kräfte-, Momente-, Spannungs-, Strom-Bilanzen usw.)

können die Differentialgleichungen, die das dynamische Verhalten beschreiben, aufgestellt werden, wie an den folgenden Beispielen gezeigt wird.

a) **Pneumatische Systeme**



$q(t)$: Volumenstrom

W : Strömungswiderstand

V : Volumen

C : Speicherkapazität

Bild 2.20: Pneumatisches System 2. Ordnung

Für das System in Bild 2.20 gilt für laminare, wirbelfreie Strömung und bei kleinen Änderungen um feste Arbeitspunkte und konstanter Temperatur:

$$\left. \begin{aligned} q_1(t) &= \frac{1}{W_1}(p_e(t) - p_1(t)) \\ q_2(t) &= \frac{1}{W_2}(p_1(t) - p_2(t)) \\ \dot{p}_1(t) &= \frac{1}{C_1}(q_1(t) - q_2(t)) \\ \dot{p}_2(t) &= \frac{1}{C_2}q_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.54)$$

Mit

$$u(t) := p_e(t) ; x_1(t) := p_1(t) ; x_2(t) := p_2(t) = y(t) \quad (2.55)$$

und

$$T_1 := W_1C_1 ; T_2 := W_2C_2 ; T_{21} := W_2C_1 \quad (2.56)$$

ergeben sich diese gekoppelten Differentialgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -(T_1^{-1} + T_{21}^{-1})x_1(t) + T_{21}^{-1}x_2(t) + T_1^{-1}u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= T_2^{-1}x_1(t) - T_2^{-1}x_2(t) \\ y(t) &= x_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.57)$$

Faßt man $x_1(t)$ und $x_2(t)$ zu einem Vektor zusammen:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad ; \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} \quad , \quad (2.58)$$

dann lassen sich die Gleichungen aus (2.57) in die übersichtliche und kompakte Form einer *Vektordifferentialgleichung* zusammenfassen, die dann auch das *Zustandsmodell* des Systems in Bild 2.20 genannt wird:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) ; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^2 \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (2.59)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -(T_1^{-1} + T_{21}^{-1}) & T_{21}^{-1} \\ T_2^{-1} & -T_2^{-1} \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} T_1^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{c}^T &= [0 \quad 1] \quad . \end{aligned} \right\} \quad (2.60)$$

Die Zustandsmodelle dynamischer Systeme werden im MA-Modul "Regelungstechnik" ausführlich behandelt.

Werden in (2.57) $x_1(t)$ und $x_2(t)$ eliminiert, dann läßt sich das System der beiden gekoppelten Differentialgleichungen auch in diese, das *Ein-/Ausgangsverhalten* des Systems in Bild 2.20 beschreibende Differentialgleichung 2. Ordnung überführen:

$$\left. \begin{aligned} T_1 T_2 \ddot{y}(t) + (T_1 + T_2 + \frac{T_1 T_2}{T_{21}}) \dot{y}(t) + y(t) &= u(t) \\ y(t_0) &= y_0 \\ \dot{y}(t_0) &= \dot{y}_0 \end{aligned} \right\} \quad (2.61)$$

Für den Fall, daß das zweite System in Bild 2.20 das erste praktisch nicht belastet, d. h., wenn in (2.54) gilt:

$$W_2 \gg W_1 \quad ; \quad V_1 \gg V_2 \quad (2.62)$$

und damit

$$q_2(t) \ll q_1(t) \quad (2.63)$$

folgt $T_{21}^{-1} \sim 0$. Solche Systeme heißen **rückwirkungsfrei**.

Die Sprungantwort des Systems in Bild 2.20 mit der Übertragungsgleichung (2.61) für $T_{21}^{-1} = 0$ läßt sich berechnen zu:

$$y(t) = h(t) = \left[1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-t/T_1} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-t/T_2} \right] 1(t) \quad (2.64)$$

Für den Spezialfall zweier rückwirkungsfreier Systeme mit gleichen Zeitkonstanten $T_1 = T_2 = T$ erhält man:

$$h(t) = 1(t) \left[1 - \left(1 + \frac{t}{T} \right) e^{-t/T} \right] \quad (2.65)$$

In Bild 2.21 sind die Sprungantworten für $p_1(t)$ und $p_2(t)$ des Systems in Bild 2.20 dargestellt.

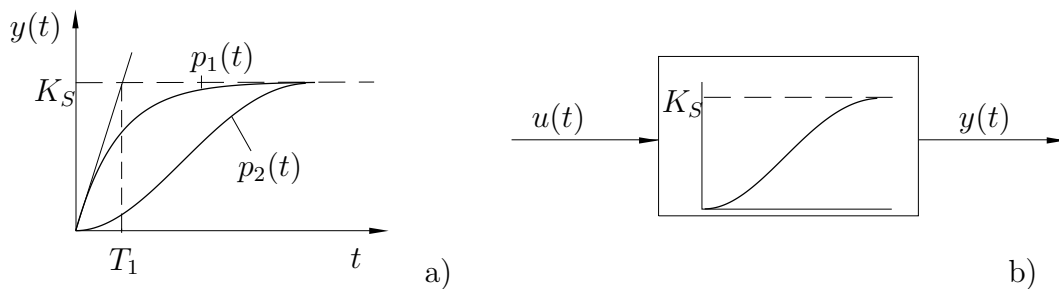


Bild 2.21: a) Sprungantwort des Systems 2. Ordnung aus Bild 2.20
 b) Darstellung des Systemverhaltens als Übertragungsblock

b) **Elektrisches RC–Netzwerk**

Das RC–Netzwerk in Bild 2.22 genügt auch dem Zustandsmodell (2.57) und der Übertragungsdifferentialgleichung, wenn die *Zeitkonstanten* der Verzögerungen definiert werden zu:

$$T_1 := R_1 C_1 ; T_2 := R_2 C_2 ; T_{21} := R_2 C_1 \quad (2.66)$$

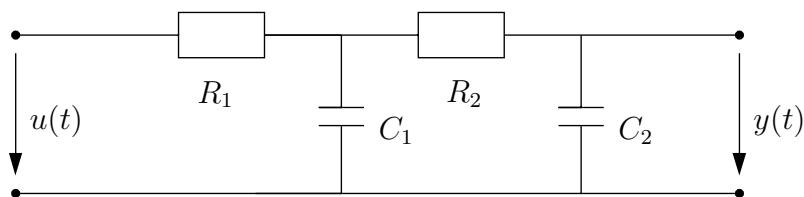


Bild 2.22: Elektrisches Netzwerk mit Verzögerung 2. Ordnung

c) **Schwinger zweiter Ordnung**

Wir haben bisher nur passive Systeme 1. und 2. Ordnung betrachtet, die nur eine Art von Energiespeichern besaßen:

Definition 2.7

Ein Signalübertragungssystem wird als passives System bezeichnet, wenn es nur energieverbrauchende Bauelemente ohne Fremdenergiezufuhr (Verstärker) besitzt.

Passive Systeme haben diese charakteristischen Eigenschaften:

- a) Passive Systeme, die nur Energiespeicher für potentielle Energie bzw. kinetische Energie haben, sind nicht schwingungsfähig.
- b) Passive schwingungsfähige dynamische Systeme haben mindestens einen Speicher für *kinetische* **und** einen Speicher für *potentielle* Energie . □

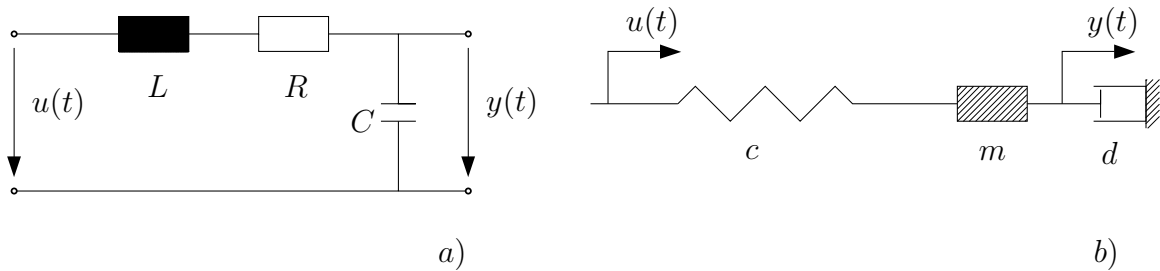


Bild 2.23: Schwinger 2. Ordnung a) elektrisch b) mechanisch

Die in Bild 2.23 als Gerätepläne angedeuteten passiven Schwinger 2. Ordnung haben je einen Speicher für potentielle Energie (Kondensator bzw. Feder) und kinetische Energie (Spule bzw. Masse). Beide Systeme genügen dieser normierten Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$\frac{1}{\omega_0^2} \ddot{y}(t) + \frac{2D}{\omega_0} \dot{y}(t) + y(t) = u(t) \quad (2.67)$$

mit $D =$ Dämpfungsgrad, $\omega_0 =$ Eigenfrequenz des ungedämpften Systems ($D = 0$) (im englischen Sprachraum wird der Dämpfungsgrad auch mit ζ abgekürzt).

Es gelten dabei diese Zusammenhänge der normierten Größen mit den Parametern der physikalischen Systeme:

elektrischer Schwinger

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\omega_0^2} &= LC \\ \frac{2D}{\omega_0} &= RC \\ \omega_0 &= \sqrt{\frac{1}{LC}}, \quad D = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \end{aligned} \right\} (2.68)$$

mechanischer Schwinger

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\omega_0^2} &= \frac{m}{c} \\ \frac{2D}{\omega_0} &= \frac{d}{c} \\ \omega_0 &= \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad D = \frac{d}{2} \sqrt{\frac{1}{mc}} \end{aligned} \right\} (2.69)$$

Mit der Substitution

$$\left. \begin{aligned} y(t) &=: x_1(t) \\ \dot{y}(t) &=: \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \ddot{y}(t) &=: \dot{x}_2(t) \end{aligned} \right\} (2.70)$$

läßt sich der Übertragungsfunktion (2.67) des Schwingers aus Bild 2.23 dieses Zustandsmodell zuordnen:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 2D\omega_0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + u(t) \\ y(t) &= [1 \quad 0] \mathbf{x}(t); \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned} \right\} . \quad (2.71)$$

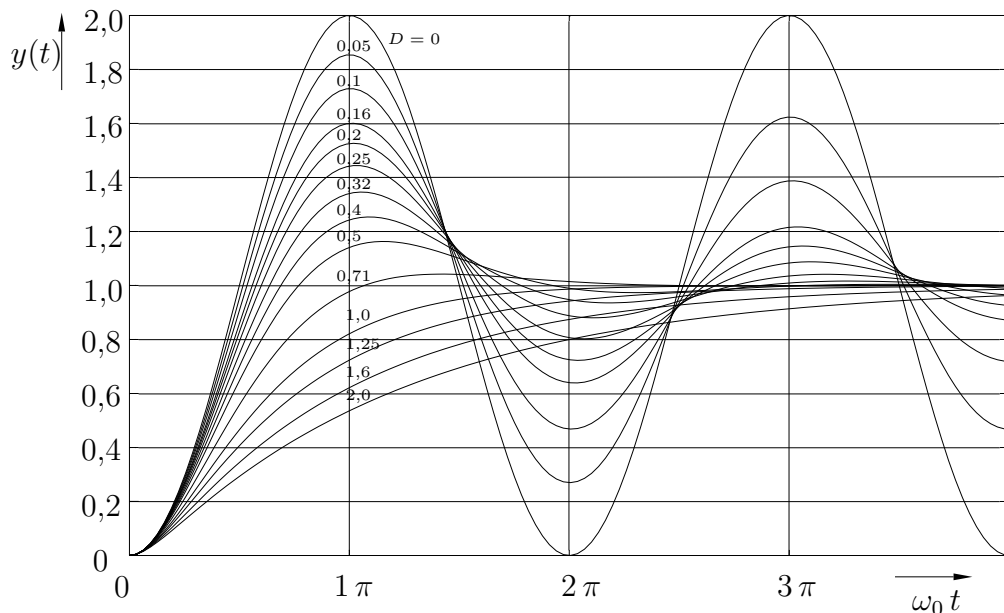


Bild 2.24: Sprungantwort $h(t)$ des Schwingers 2. Ordnung für verschiedene Dämpfungsgrade D

2.5.3 Proportionalübertragungssysteme höherer Ordnung

Dynamische Systeme, deren Ausgangssignale bei einer Sprungerregung mit zunehmender Zeit gegen einen festen Wert streben, heißen *Proportionalübertragungssysteme*, P-Systeme oder auch Systeme mit Selbstaussgleich. Hat ein P-System 2 oder mehr Speicher für Energie und/oder Masse, dann läßt sich aus der Sprungantwort nur die Systemverstärkung K_S ermitteln (Bild 2.25).

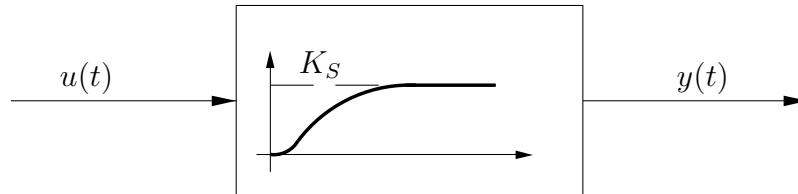


Bild 2.25: Blockschaltbild eines P-Systems höherer Ordnung

Bei Systemen mit mehreren Speichern wird unterschieden zwischen

- a) Systemen **mit** (*innerer*) *Rückwirkung* und
- b) Systemen **ohne** (*innere*) *Rückwirkung*.

a) **Systeme mit (innerer) Rückwirkung,**

bei denen in der Praxis das Zusammenwirken der inneren Teilsysteme nicht im einzelnen zu erkennen ist, werden durch eine Differentialgleichung höherer Ordnung dieser Form beschrieben:

$$y^{(n)}(t) + \dots + a_2 \ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) . \quad (2.72)$$

Ihr Übertragungsverhalten wird (im Zeitbereich) durch die Übergangsfunktion (Sprungantwort) $h(t)$ charakterisiert (Bild 2.25), wobei sich der Systemverstärkungsfaktor K_S aus der Sprungantwort $h(t)$ bzw. den Polynomkoeffizienten der Gleichung (2.72) so bestimmt:

$$K_S = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \frac{b_0}{a_0} . \quad (2.73)$$

Mit der Substitution

$$\left. \begin{aligned} y(t) &=: x_1(t) \\ \dot{y} &=: x_2(t) = \dot{x}_1(t) \\ &\vdots \\ y^{(n-1)} &=: x_n(t) = \dot{x}_{n-1}(t) \\ y^{(n)} &=: \dot{x}_n(t) = -a_{n-1}x_n - \dots - a_1x_2 - a_0x_1 + b_0u(t) , \end{aligned} \right\} (2.74)$$

kann dem Übertragungsmodell, also der Differentialgleichung n -ter Ordnung (2.72), ein Zustandsmodell der Form (2.59) zugeordnet werden:

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T \end{aligned} \right\} (2.75)$$

Bei allen regelungstechnischen Blockschaltbildern wird davon ausgegangen, daß die einzelnen, durch rechteckige Blöcke gekennzeichneten Regelkreisglieder *rückwirkungsfrei* sind. Rückwirkungsfreiheit bedeutet dabei, daß die Ausgangsgröße eines Regelkreisgliedes nicht auf die Eingangsgröße zurückwirkt. Regelkreisglieder mit einer inneren Rückwirkung müssen daher immer in einem Block dargestellt werden.

b) **Systeme ohne innere Rückwirkung**

können mittels einzelner Teilblöcke dargestellt werden (Bild 2.26), die dann gegebenenfalls auch mittels der weiter unten behandelten Blockschaltbildalgebra zusammengefaßt werden können.

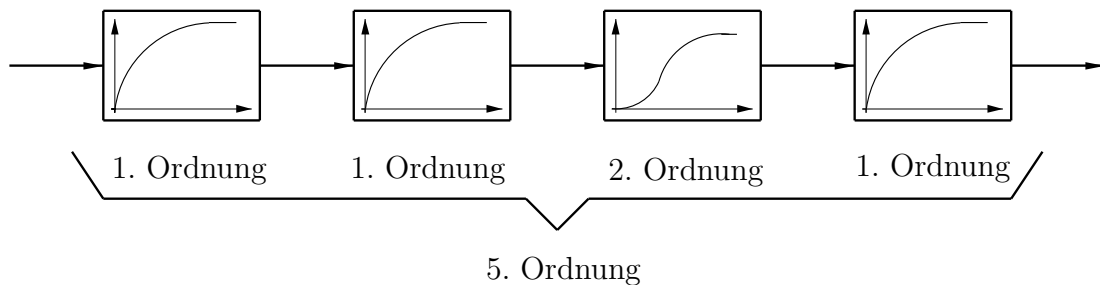


Bild 2.26: Beispiel: Blockschaltbild eines Systems 5. Ordnung

Im Blockschaltbild steht ein gerichteter Pfeil für **Signalfluß + Rückwirkungsfreiheit**.

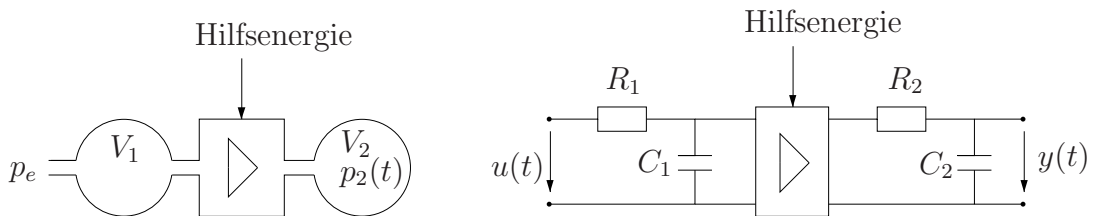


Bild 2.27: Entkopplung durch Trennverstärker

Rückwirkungsfreie Systeme erhält man durch **energetische Entkopplung**:

- a) durch möglichst belastungsfreie Ankopplung
- b) durch Zufuhr von Fremdenergie über Trennverstärker (Bild 2.27)
- c) **Totzeitsysteme**
 treten immer dann auf, wenn in einem System keine konzentrierten Energie- und Stoffspeicher angenommen werden können, sondern eine homogene Energie- und Stoffverteilung vorliegt. Diese Systeme müssen mittels partieller Differentialgleichungen modelliert werden, die dann geeignet durch eine Vielzahl von gewöhnlichen Differentialgleichungen angenähert werden.

In Bild 2.28 ist als Beispiel eines Totzeitsystems (ohne zusätzliche Verzögerung) ein Förderband gezeigt.

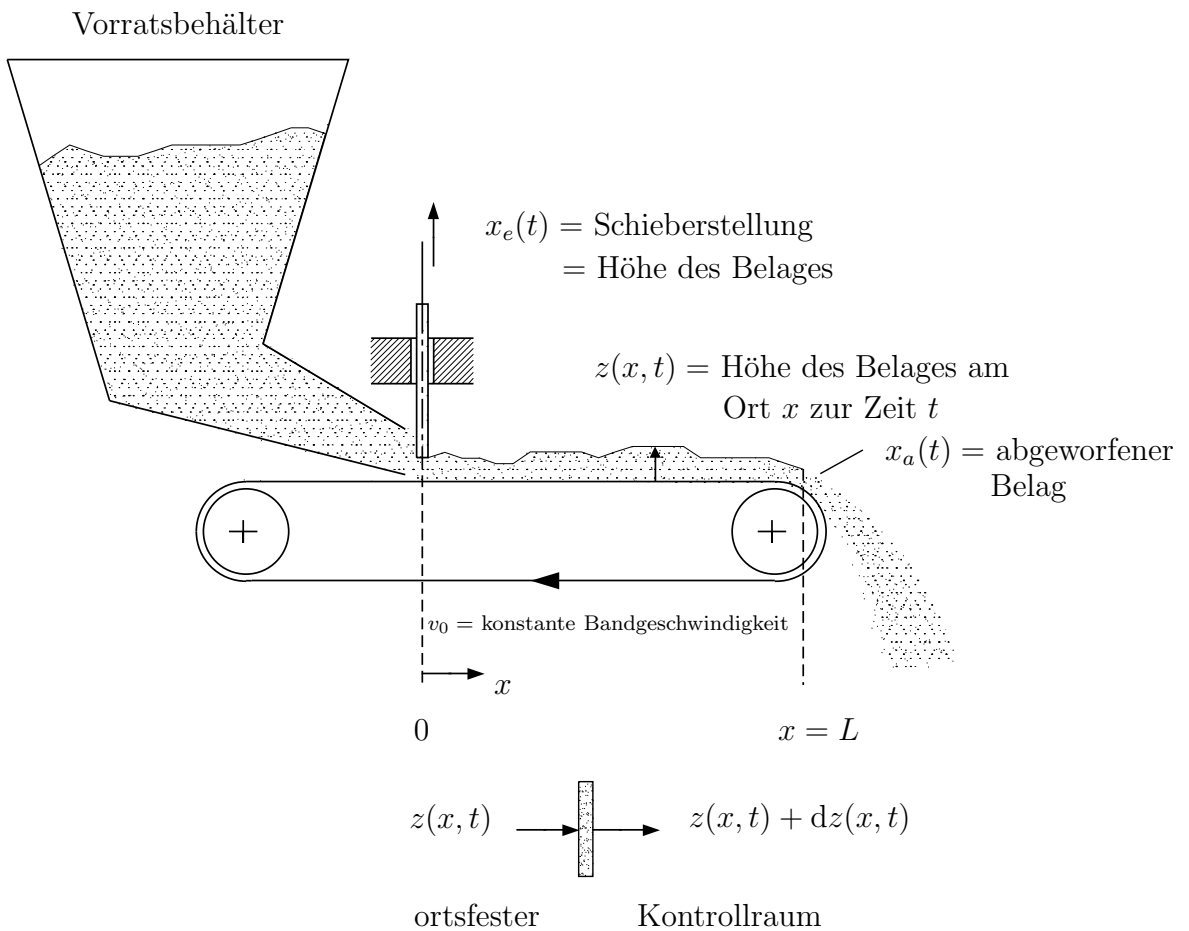


Bild 2.28: Prinzip des Materialtransportes durch Förderband

Hier kann für einen Kontrollraum folgende Bilanzgleichung geschrieben werden:

$$z(x, t) - (z(x, t) + dz(x, t)) = 0 , \tag{2.76}$$

wobei $dz(x, t)$ das totale Differential bedeutet. Daraus ergibt sich

$$dz = \frac{\partial z(x, t)}{\partial x} dx + \frac{\partial z(x, t)}{\partial t} dt = 0 \quad . \quad (2.77)$$

Nach Einführen der konstanten Transportgeschwindigkeit $v_0 = dx/dt$ wird als End-
 ergebnis die sog. (Massen-)Kontinuitätsgleichung gefunden:

$$\frac{\partial z(x, t)}{\partial t} + v_0 \cdot \frac{\partial z(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (2.78)$$

mit folgenden Randbedingungen am Bandanfang und -ende:

$$\left. \begin{aligned} z(0, t) &= x_e(t) \\ z(L, t) &= x_a(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.79)$$

Da bei der vorliegenden technischen Anordnung nur am Schieber ($x_e(t)$) eingegriffen
 werden kann und primär der abgeworfene Belag $x_a(t)$ von Interesse ist, ist leicht zu
 zeigen, daß der Lösungsansatz

$$z(x, t) = x_e\left(t - \frac{x}{v_0}\right) \quad (2.80)$$

die partielle Dgl. (2.77) erfüllt und nach Einarbeitung der Randbedingungen zur
 expliziten Signalbeziehung

$$\left. \begin{aligned} x_a(t) &= x_e(t - T_t) \\ y(t) &= u(t - T_t) \end{aligned} \right\} \quad (2.81)$$

führt. Dabei wird $T_t = L/v_0$ als Laufzeit oder Totzeit bezeichnet; es ist die Zeit, die
 der Transport eines Beleglements von $x = 0$ nach $x = L$ benötigt. In Bild 2.29 ist
 die Systemantwort eines Totzeitgliedes auf einen Einheitssprung am Systemeingang
 dargestellt.

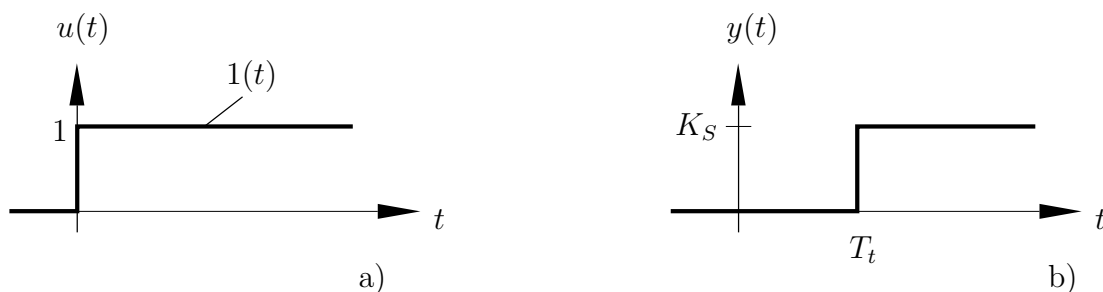


Bild 2.29: Sprungantwort des Totzeitsystems: a) Systemerregung mit Einheitssprung,
 b) Systemantwort des Totzeitsystems

d) **Kennwerte gemessener Übergangsfunktionen**

In vielen Fällen der Praxis können die Systeme von Regelstrecken höherer Ordnung nicht in Teilsysteme niedrigerer Ordnung zerlegt werden. Es muß dann vielfach mit gemessenen Übergangsfunktionen weitergearbeitet werden, die durch einfach zu bestimmende Approximationen charakterisiert werden. Dem Bild 2.30 ist zu entnehmen, wie ein System höherer Ordnung durch ein System 1. Ordnung mit Totzeit angenähert werden kann.

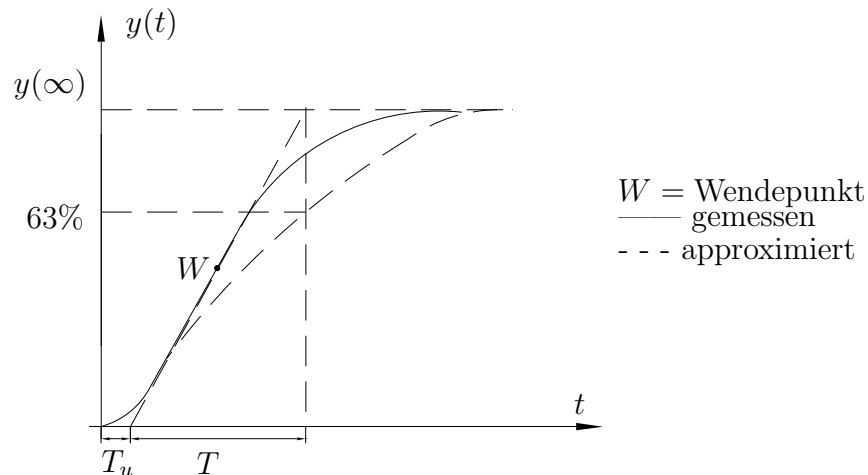


Bild 2.30: Approximation eines Systems höherer Ordnung durch ein PT_1 -System mit Tot-(Verzugs)zeit T_u

In der Praxis kann aus technischen Gründen oftmals ein System nur durch relativ kleine sprungförmige Störungen am Eingang erregt werden, z. B. von u_1 nach u_2 (Bild 2.31).

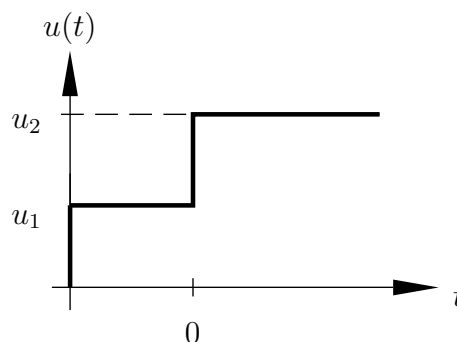


Bild 2.31: Sprungförmiges Eingangssignal für $t = 0$ von u_1 nach u_2

Die Systemverstärkung K_S berechnet sich aus $y(\infty)$ im Bild 2.30 wie folgt:

$$K_S = \frac{y(\infty) - y(0)}{u_2 - u_1} \quad (2.82)$$

und damit kann dann die Ersatzübergangsfunktion in Bild 2.30 analytisch beschrieben werden:

$$h_e(t) = K_S 1(t - T_u) \left[1 - \exp\left(-\frac{t - T_u}{T}\right) \right] . \quad (2.83)$$

2.5.4 Systeme ohne Ausgleich — I-Glieder —

Bisher wurden nur Systeme besprochen, die für $t \rightarrow \infty$ einem festen Beharrungszustand $y(\infty)$ zustreben. Eine große praktische Bedeutung (z.B. Füllstandsregelungen, Antriebsregelung, Fahrzeugführung, I-Regler) haben allerdings auch Systeme, die keinem konstanten Endwert zustreben, sogenannte *Systeme ohne Ausgleich* .

a) Beispiel für I-Glied ohne (zusätzliche) Verzögerung:

Füllstandsregelung in einem Behälter (Bild 2.32)

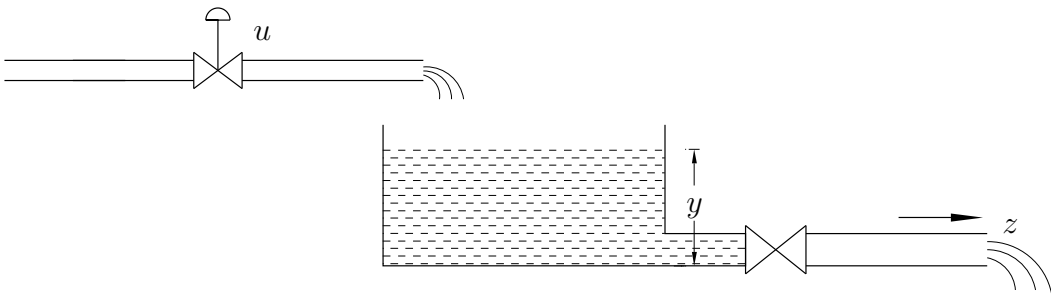


Bild 2.32: Füllstandsregelung als Beispiel eines Systems ohne Ausgleich

Wird bei konstantem Ablauf z die Stellgröße u um $u_0 1(t)$ (u_0 sei klein) verstellt, dann steigt (sinkt) der Pegel y (bei Betrachtung kleiner Änderungen) linear mit der Zeit t . Allgemein gilt dann:

$$\dot{y}(t) = K_I u(t) . \quad (2.84)$$

Dieses System wird durch eine Differentialgleichung beschrieben, bei der der Term $y(t)$ fehlt. Durch Integration dieser Differentialgleichung

$$y(t) = K_I \int_0^t u(\tau) d\tau + y_0 \quad \text{bzw.} \quad y(t) = \frac{1}{T_I} \int_0^t u(\tau) d\tau + y_0 \quad (2.85)$$

$$K_I =: \text{Integrierbeiwert} \qquad \frac{1}{T_I} =: \text{Integrationszeitkonstante}$$

ist zu erkennen, daß der Systemausgang das Integral des Systemeingangs ist. Der Füllstandsbehälter gehört also zur Klasse der I-Glieder.

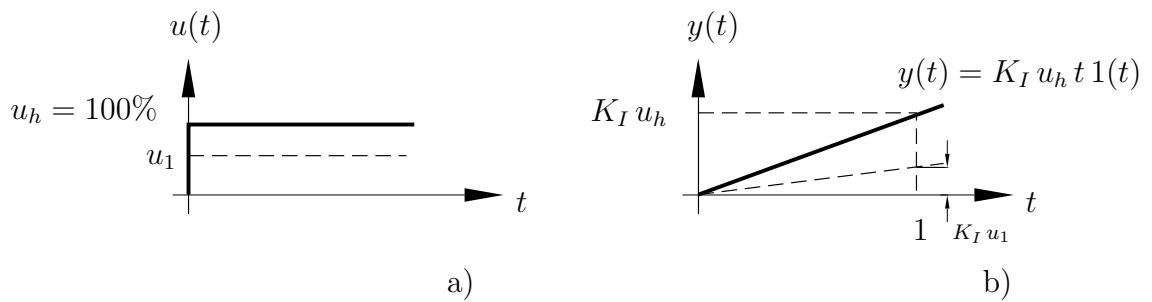


Bild 2.33: Übergangverhalten eines I-Gliedes: a) Eingangssignal b) Sprungantwort

b) **Beispiel für ein I-Glied mit Verzögerung 1. Ordnung: Antriebsregelung**

Das dynamische Verhalten des Systems nach Bild 2.34 kann dadurch untersucht werden, daß für konstante Felderregung eine sprungförmige Änderung des Ankerstroms eingeführt wird.

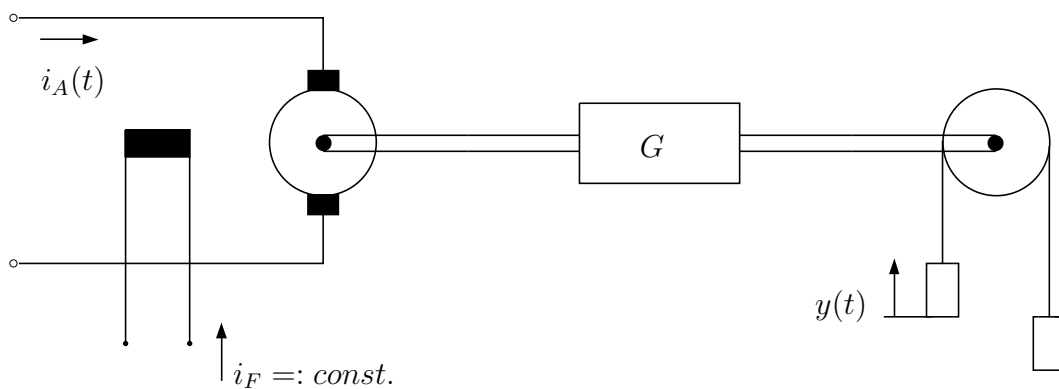


Bild 2.34: Geräteplan eines Förderantriebes

Wird in 1. Näherung der Einfluß der *Induktivitäten* und der *Haftreibung* vernachlässigt, lautet die Bewegungsgleichung des Systems:

$$I\dot{\omega}(t) + B\omega(t) = M = Ci_A(t) \quad (2.86)$$

mit

- I : auf Motorwelle bezogenes Trägheitsmoment ,
- B : Bremswiderstand ,
- $\omega(t)$: Winkelgeschwindigkeit ,
- i_A : Ankerstrom ,
- M : Drehmoment und
- C : Konstante .

Nach einer Umformung ergibt sich:

$$T_m \dot{\omega}(t) + \omega(t) = \frac{C}{B} i_A(t) \tag{2.87}$$

$T_m = I/B$: mechanische Zeitkonstante für Motor–Last-System .

Die Verschiebung der Last zwischen den Positionen $y_1(t)$ und $y_2(t)$ ergibt sich durch Integration über die Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ zwischen den zugehörigen Zeiten t_1 und t_2 :

$$y(t) = y_2(t) - y_1(t) = y(t_2) - y(t_1) = K_I \int_{t_1}^{t_2} \omega(\tau) d\tau \tag{2.88}$$

$$\dot{y}(t) = K_I \omega(t) \tag{2.89}$$

Durch Elimination von $\omega(t)$ ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} &T_m \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = \frac{C}{B} K_I i_A(t) = K i_A(t) \quad , \\ \text{bzw.} &T_m \dot{y}(t) + y(t) = K \int_0^t i_A(\tau) d\tau \quad . \end{aligned} \right\} \tag{2.90}$$

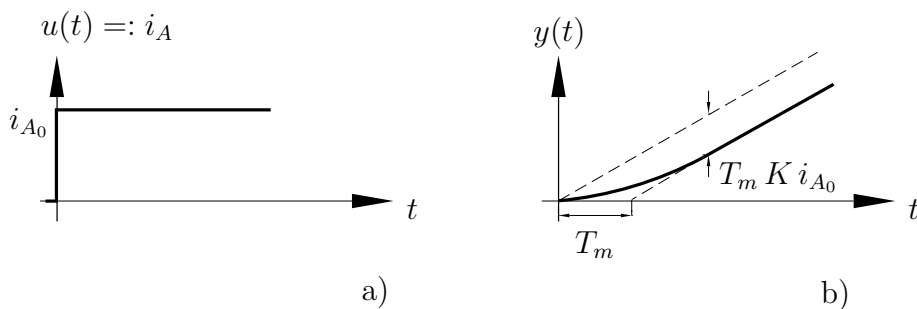


Bild 2.35: Übergangverhalten des Förderantriebes in Bild 2.34

a) Sprungförmige Erregung b) Sprungantwort

Systembeschreibungen mit I-Verhalten treten bei allen Positionierungsaufgaben auf: *unter Wasser, auf dem Wasser, auf dem Land, in der Luft, auch im Weltraum.*

2.5.5 Zusammenfassung zu den Differentialgleichungen dynamischer Systeme

In der Systemtheorie können diese wichtigen Systemklassen unterschieden werden:

A) Nichtlineare Systeme

B) Lineare Systeme

1. Systeme mit verteilten Parametern: partielle Differentialgleichungen, Totzeitsysteme
2. Systeme mit konzentrierten Parametern: gewöhnliche Differentialgleichungen
 - 2.1) Zeitvariable Systeme: zeitvariable Parameter
 - 2.2) Zeitinvariante Systeme: konstante Parameter
 - a) System mit Ausgleich (P-Glieder) n -ter Ordnung: Differentialgleichungen n -ter Ordnung. Die Terme mit der 0-ten und der n -ten Ableitung müssen vorhanden sein.
 - b) Systeme ohne Ausgleich (I-Glieder) n -ter Ordnung: Differentialgleichungen $n + 1$. Ordnung; der Term mit der 0-ten Ableitung fehlt.

Im weiteren wird vorausgesetzt, daß die Regelkreisglieder durch lineare, zeitinvariante Systeme, also durch gewöhnliche, lineare Differentialgleichungen mit konstanten Parametern hinreichend genau beschrieben werden können.

In den Tabellen 2.1, 2.2 und 2.3 sind wichtige Systeme mit den dazugehörigen beschreibenden Gleichungen aufgeführt, die einzeln, aber vor allem in Kombination in regelungstechnischen Anlagen angetroffen werden.

Tabelle 2.1: Pneumatische Elemente

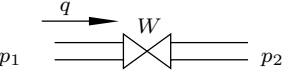
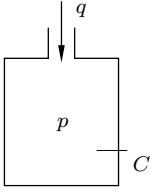
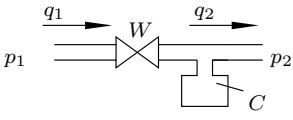
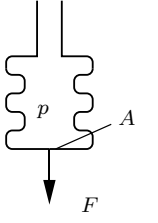
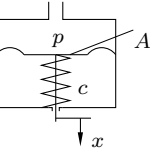
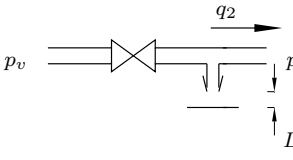
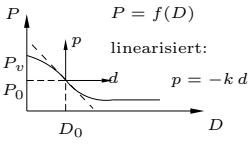
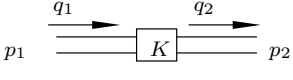
Benennung	Sinnbild	Gleichung	Bezeichnungen	Voraussetzungen Bemerkungen
Drossel		$q = \frac{1}{W}(p_1 - p_2)$	q = Volumenstrom W = Strömungswiderstand T = abs. Temperatur	laminare Strömung $p_1 - p_2 \ll p_2$ $T = const.$
Volumen		$p = \frac{1}{C} \int q dt$	$C = \frac{V}{RT}$ V = Volumen R = Gaskonstante	ideales Gas $T = const.$
Drossel Volumen		$W C \dot{p}_2 + p_2 = p_1$	W = Strömungswiderstand $C = \frac{V}{RT}$	Wie bei Drossel und bei Volumen q_2 vernachlässigbar
Balg		$F = A p$	A = wirksame Balgfläche F = Kraft	keine Federwirkung des Balges Volumen vernachlässigbar
Membran		$x = \frac{1}{c} A p$	c = Federkonstante A = Membranfläche x = Weg	Feder linear Volumen vernachlässigbar
Düse Prallplatte			$p_v = konst.$ Versorgungsdruck (P_0, D_0) Arbeitspunkt $d = D - D_0, p = P - P_0$	keine Rückwirkung q_2 vernachlässigbar
idealer Verstärker		$p_2 = K p_1$	K = Verstärkung	$K = const.$ $q_1 \approx 0$ q_2 beliebig

Tabelle 2.2: Elektrische Bauelemente

Benennung	Sinnbild	Gleichung	Bezeichnungen	Voraussetzungen Bemerkungen
Widerstand		$u = R i$	R = elektrischer Widerstand	$R = const.$
Kondensator		$u = \frac{1}{C} \int i dt$	C = Kapazität	$C = const.$ keine Verluste
Spule		$u = L \frac{di}{dt}$	L = Induktivität	$L = const.$ keine Verluste
idealer Verstärker		$u_2 = K u_1$	K = Verstärkung	$K = const.$ $i_1 \approx 0$ i_2 beliebig

Tabelle 2.3: Mechanische Bauelemente

Dämpfer		$F = d \dot{x}$	d = Dämpfungskonstante	$d = const.$
Feder		$F = c x$	c = Federkonstante	$c = const.$
Masse		$F = m \ddot{x}$	m = Masse	$m = const.$
Für Rotationsbewegungen ist F durch M (Drehmoment), x durch φ (Drehwinkel), m durch I (Trägheitsmoment) zu ersetzen				

2.6 Beschreibung im Bildbereich

Bisher wurden die betrachteten dynamischen **Systeme** ausschließlich im **Zeitbereich** beschrieben:

- a) Differentialgleichungen.
- b) Systemantwort auf Testsignale (Gewichtsfunktion, Übergangsfunktion).

Zur analytischen Berechnung der Systemantwort bei gegebenen Eingangssignal ist dann eine Auswertung des Faltungsintegrals erforderlich.

Die folgenden Betrachtungen beruhen auf der Verwendung sinusförmiger Eingangsgrößen (vgl. Abschnitt 2.3). Aus einem sinusförmigen Signal der Frequenz ω am Eingang entsteht wieder ein sinusförmiges Signal derselben Frequenz am Ausgang. Damit ist die Übertragungseigenschaft eines *linearen Systems* für ein sinusförmiges Signal durch zwei skalare Größen gegeben, nämlich die „Verstärkung“, auf Grund derer sich die Amplitude des Signals verändert, und der Phasenverschiebung. Dies hat zur Folge, daß in der mathematischen Darstellung keine Differentialgleichungen mehr auftreten, sondern nur noch algebraische Gleichungen. In der Regelungstechnik hat sich diese Art der Systembeschreibung für lineare Systeme, der Beschreibung im Bild- und Frequenzbereich, als alternativer Weg für die Beschreibung und Analyse von Systemen und den Entwurf von Reglern durchgesetzt.

Der Bildbereich wird durch die Ebene der komplexen Variablen $s = \sigma + j\omega$ aufgespannt. Mit Hilfe dieser Variablen und der Laplace-Transformation (siehe Abschnitt A.5) lassen sich für eine große Klasse von Zeitfunktionen $f(t)$, auch Originalfunktionen genannt, umkehrbar eindeutig eine sogenannte Bildfunktion $F(s)$ zuordnen:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt. \quad (2.91)$$

Im Zusammenhang mit der Laplace-Transformation spricht man bei $f(t)$ von der Darstellung der Funktion im *Zeitbereich* bzw. Originalbereich und bei $F(s)$ von der Darstellung im Bildbereich. Um die Zuordnung zwischen Bildfunktion und Originalfunktion zu kennzeichnen, wird die Operatorschreibweise

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \quad (2.92)$$

oder das Korrespondenzzeichen $\bullet\text{--}\circ$ in folgender Weise

$$F(s) \bullet\text{--}\circ f(t) \quad (2.93)$$

verwendet.

2.6.1 Anwendung der Laplace–Transformation in der Regelungstechnik

Für die Anwendung in der Regelungstechnik sind der Differentiations– und der Faltungssatz (Tabelle A.1, Nr. 6 + 8) von besonderer Bedeutung. Der erste dient zur Algebraisierung von Differentialgleichungen, der zweite ist die Grundlage der Blockschaltbildalgebra linearer Systeme.

Die Anwendung des Differentiationsatzes auf die lineare Differentialgleichung

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_2 \ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) + b_1 \dot{u}(t) + \dots + b_m u^{(m)}(t) ; m \leq n \quad (2.94)$$

mit den zu Null angenommenen Anfangsbedingungen

$$y(0) = y_0 = \dot{y}(0) = \dot{y}_0 = \dots = y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)} = 0 \quad (2.95)$$

liefert zunächst

$$\begin{aligned} [a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0] Y(s) = \\ [b_0 + b_1 s + \dots + b_{m-1} s^{m-1} + b_m s^m] U(s) . \end{aligned} \quad (2.96)$$

Als Verhältnis der transformierten Aus– und Eingangsgrößen folgt die **komplexe Übertragungsfunktion** des durch die vorstehende Differentiationsgleichung beschriebenen dynamischen Systems zu

$$G(s) := \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_{m-1} s^{m-1} + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + a_n s^n} . \quad (2.97)$$

Als nächstes betrachten wir die Verhältnisse im Bild 2.36: Hier ist bereits berücksichtigt, daß die Übertragungsfunktion die Laplace–Transformierte der Gewichtsfunktion ist.

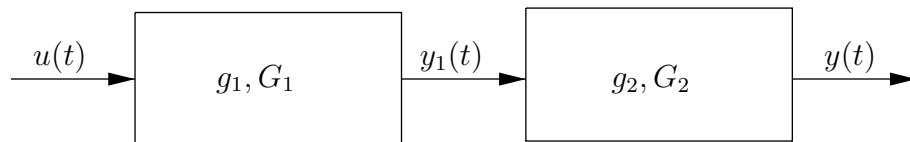


Bild 2.36: Zur Anwendung des Faltungssatzes

Das Ausgangssignal $y_1(t)$ läßt sich mittels der Faltungsintegration berechnen zu

$$y_1(t) = \int_0^t g_1(v) u(t-v) dv , \quad (2.98)$$

ebenso gilt für $y(t)$ in Bezug auf $y_1(t)$:

$$y(t) = \int_0^t g_2(\tau) y_1(t-\tau) d\tau . \quad (2.99)$$

Durch Einsetzen und Berücksichtigung der unterschiedlichen Integrationsvariablen findet man für den Zusammenhang zwischen $y(t)$ und $u(t)$:

$$y(t) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g_1(v) \cdot g_2(\tau) \cdot u(t - \tau - v) d\tau dv \quad , \quad (2.100)$$

einen recht schwierig auswertbaren Ausdruck. Die Verhältnisse sind im Bildbereich durch Anwendung des Faltungssatzes der Laplace–Transformation viel einfacher darstellbar zu:

$$\left. \begin{aligned} Y_1(s) &= G_1(s)U(s) \\ Y(s) &= G_2(s)Y_1(s) = G_1(s)G_2(s)U(s) \end{aligned} \right\} . \quad (2.101)$$

Damit ist die wesentliche Grundlage der Blockschaltbildalgebra gelegt, mit deren Hilfe komplizierte Systemstrukturen vereinfacht werden können. Die wichtigsten Regeln, die dann u. a. auch aus der Eigenschaft der Laplace–Transformation als linearer Operator folgen, sind nachfolgend zusammengestellt.

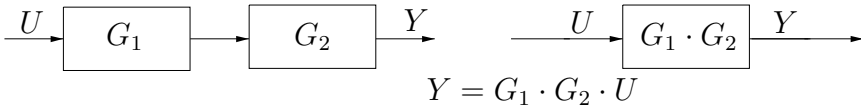
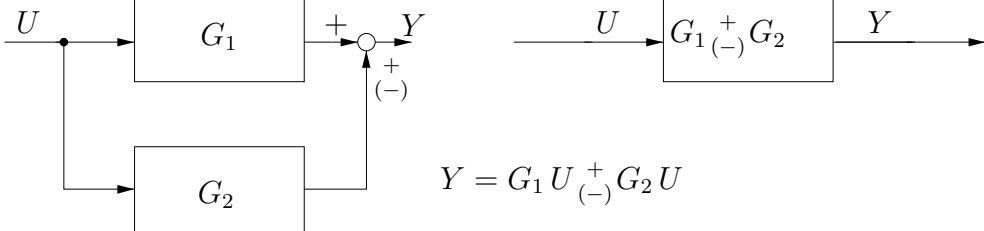
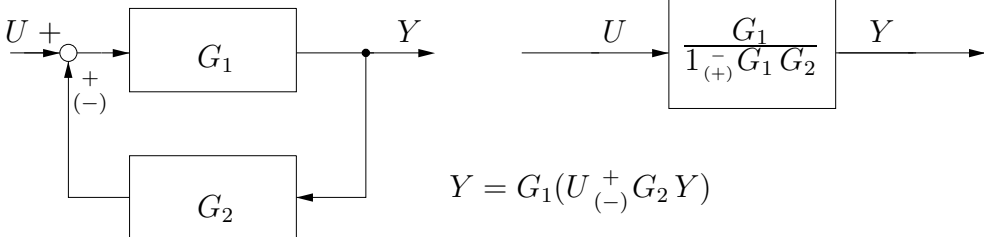
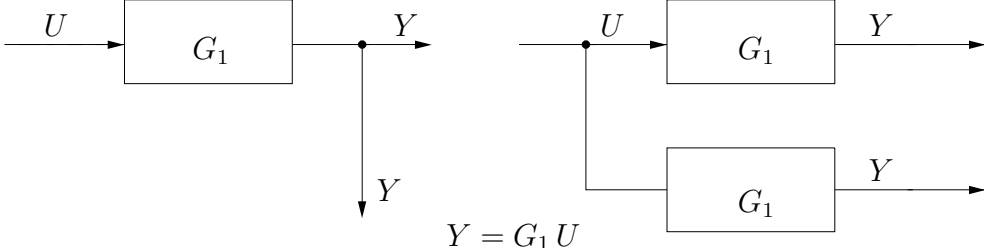
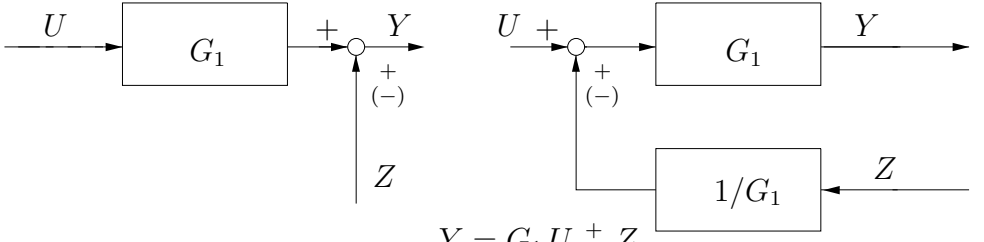
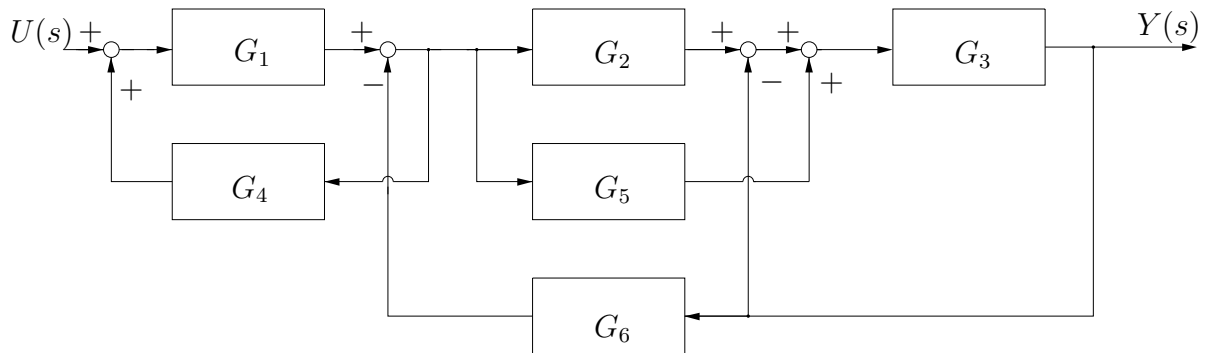
<p>1. Zusammenfassung zweier in Reihe liegender Blöcke:</p>  $Y = G_1 \cdot G_2 \cdot U$
<p>2. Zusammenfassung zweier paralleler Blöcke:</p>  $Y = G_1 U_{(-)}^{+} G_2 U$
<p>3. Elimination einer Rückführschleife:</p>  $Y = G_1 (U_{(-)}^{+} G_2 Y)$
<p>4. Verlegung einer Verzweigungsstelle vor einen Block:</p>  $Y = G_1 U$
<p>5. Verlegung einer Additionsstelle vor einen Block:</p>  $Y = G_1 U_{(-)}^{+} Z$

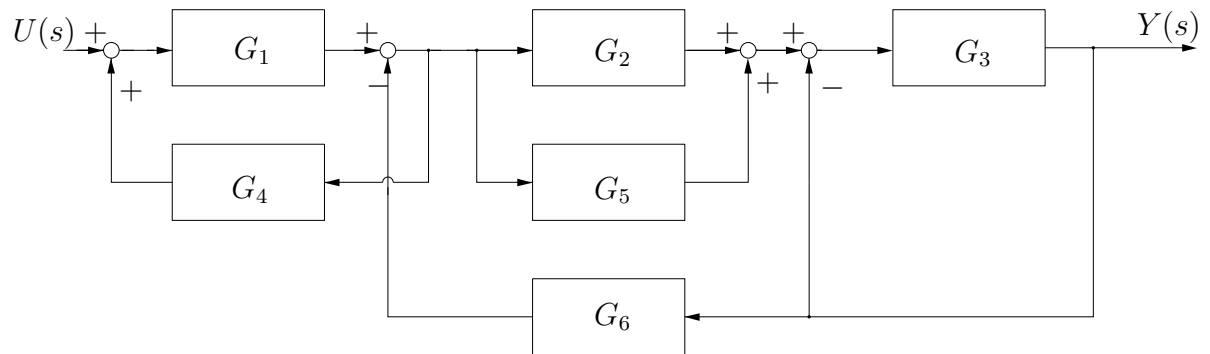
Tabelle 2.4: Regeln zur Blockschaltbildalgebra

Beispiel zur Blockschaltbildalgebra

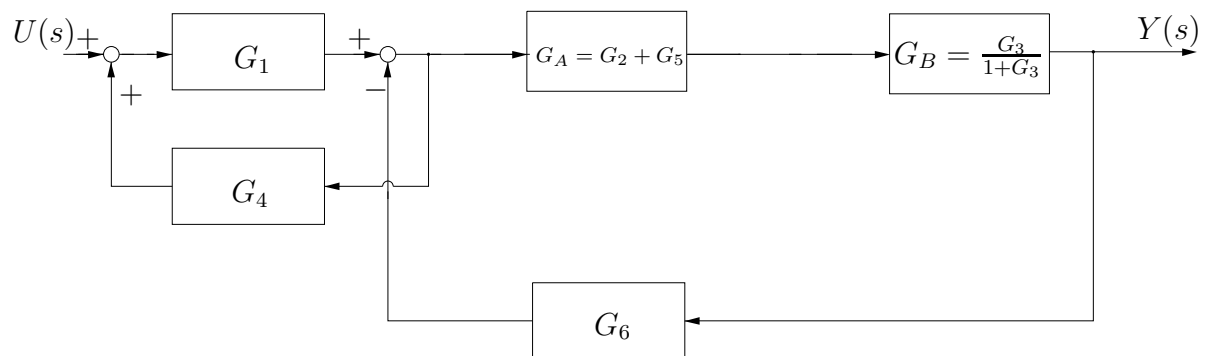
(Das Argument s der Übertragungsfunktion ist der Übersichtlichkeit halber weggelassen)



1. Umordnung von Additionsstellen:



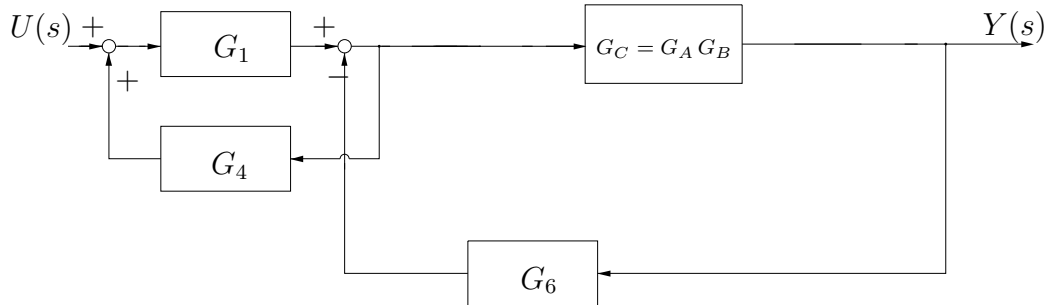
2. Zusammenfassung zweier paralleler Blöcke, Elimination einer Rückführschleife:



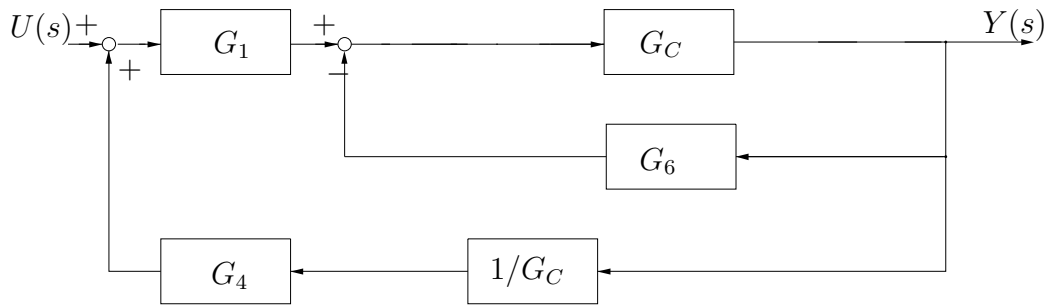
Beispiel zur Blockschaltbildalgebra: Fortsetzung

(Das Argument s der Übertragungsfunktion ist der Übersichtlichkeit halber weggelassen)

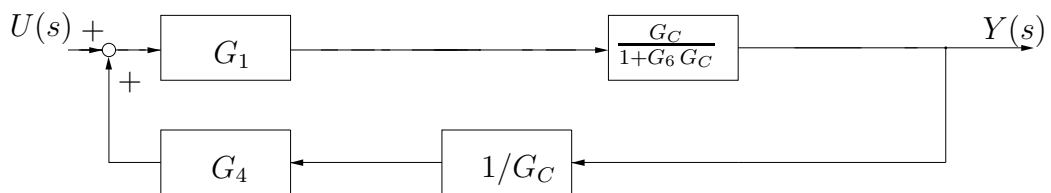
3. Zusammenfassung zweier in Reihe liegender Blöcke:



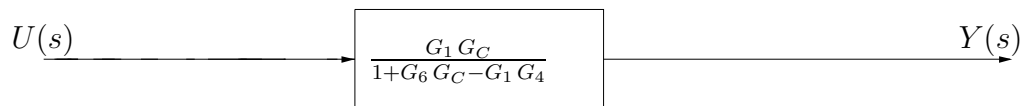
4. Zurückverlegung einer Verzweigungsstelle



5. Elimination einer Rückführschleife:



6. Elimination einer Rückführschleife:



2.6.2 Definition und Eigenschaften der Übertragungsfunktion

Im folgenden werden lineare, zeitinvariante Übertragungssysteme durch Systemkenngrößen im Bildbereich beschrieben. Dabei soll zunächst zwischen Ein-/ Ausgangsvariablen und Ein-/ Ausgangssignalen eines Systems unterschieden werden (Bild 2.37).

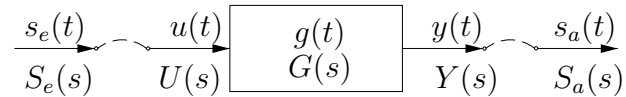


Bild 2.37: Lineares Übertragungssystem mit den Ein-/Ausgangsvariablen $u(t)$ bzw. $y(t)$ und Ein-/Ausgangssignalen $s_e(t)$ bzw. $s_a(t)$

Lineare, zeitinvariante Systeme mit konzentrierten Parametern für die Energie- und/oder Stoffspeicherung werden – sofern eine Totzeit zunächst nicht berücksichtigt wird – durch die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i}{dt^i} y(t) = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j}{dt^j} u(t) \quad (2.102)$$

beschrieben, denen durch Algebraisierung mittels der Laplace-Transformation

$$\sum_{i=0}^n a_i s^i Y(s) = \sum_{j=0}^m b_j s^j U(s) \quad (2.103)$$

die zugehörige komplexe *Übertragungsfunktion* zugeordnet werden kann:

$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_{m-1} s^{m-1} + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + a_n s^n} = \frac{Z(s)}{N(s)}} \quad (2.104)$$

Hierbei wurde vorausgesetzt, daß alle Anfangsbedingungen der zugrundeliegenden Differentialgleichungen zu Null angenommen werden können. Dies ist bei der Anwendung in der Regelungstechnik weitgehend üblich und gerechtfertigt, da die linearen Systembeziehungen praktisch immer über einen Linearisierungsprozeß um einen festen Arbeitspunkt gewonnen werden müssen. Anschließend werden dann nur Abweichungen und Bewegungen um diese Arbeitspunkte betrachtet.

Die komplexe Übertragungsfunktion $G(s)$, die als Quotient der Laplace-Transformierten der Ausgangsgröße und der Eingangsgröße definiert ist, ist eine gebrochen rationale Funktion. Das Zählerpolynom $Z(s)$ hat den Grad m , das Nennerpolynom $N(s)$ den Grad n , wobei für technische Systeme immer gilt:

$$m \leq n \quad (2.105)$$

Ein Übertragungsglied mit $m > n$ ist physikalisch nicht realisierbar. Die Übertragungsfunktion eines idealen (nicht realisierbaren) differenzierenden Übertragungsgliedes

(D–Glieder) wird durch $G(s) = s$ beschrieben. Jede Übertragungsfunktion mit $m > n$ lässt sich in folgende Form

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{Z_1(s)}{N(s)} + \kappa_0 + \kappa_1 s + \dots + \kappa_{m-n} s^{m-n} \quad (2.106)$$

zerlegen, wobei Grad $(Z_1(s)) = n - 1$ gilt und immer Terme in s mit positiven Exponenten und damit ideal differenzierende Glieder auftreten. Ein derartiges D–Glieder müßte allerdings für ein Eingangssignal mit beliebig hoher Frequenz ein Ausgangssignal mit beliebig großer Amplitude liefern.

Für Systeme mit Ausgleich ($a_0 \neq 0$) ergibt sich die Verstärkung K des Systems zu:

$$K = G(s)|_{s=0} = \frac{b_0}{a_0} \quad (2.107)$$

2.6.3 Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion

In Gl. (2.104) sind Zähler und Nenner der Übertragungsfunktion Polynome in s . Daher spricht man bei dieser Darstellung auch von der *Polynomform* der Übertragungsfunktion. $G(s)$ kann in eine andere Form überführt werden, wenn man die Polynome im Zähler und Nenner als Produkte von Linearfaktoren schreibt (Fundamentalsatz der Algebra). Es gilt

$$b_0 + b_1 s + \dots + b_{m-1} s^{m-1} + b_m s^m = b_m \prod_{i=1}^m (s - n_i) \quad (2.108)$$

und

$$a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + a_n s^n = a_n \prod_{i=1}^n (s - p_i), \quad (2.109)$$

wobei n_i und p_i die Nullstellen des Zähler- bzw. des Nennerpolynoms von $G(s)$ sind. Bei technisch–physikalischen Systemen müssen alle a_i und b_i reell sein, daher sind die *Polstellen* p_i bzw. die *Nullstellen* n_i von $G(s)$ entweder reell oder konjugiert komplex.

Das auf der linken Seite von (2.109) stehende Polynom nennt man das *charakteristische Polynom* des Systems.

Pol–Nullstellen–Form der Übertragungsfunktion.

Unter Verwendung der Pole und Nullstellen kann die Übertragungsfunktion in der Form

$$G(s) = k \cdot \frac{\prod_{j=1}^m (s - n_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \quad (2.110)$$

dargestellt werden, wobei

$$k = \frac{b_m}{a_n} \quad (2.111)$$

gilt. Die Darstellung der Übertragungsfunktion in Gl. (2.110) bezeichnet man als *Pol-Nullstellen-Form*.

Eine lineares, zeitinvariantes System ohne Totzeit wird durch die Angabe der Pol- und Nullstellenverteilung in der s -Ebene

$$s = \sigma + j\omega = \operatorname{Re}(s) + j\operatorname{Im}(s) \quad , \quad (2.112)$$

sowie des Faktors k vollständig beschrieben. Dies kann bildlich im *Pol-Nullstellen-Bild* dargestellt werden (Bild 2.38).

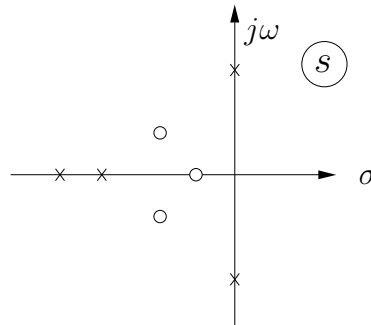


Bild 2.38: Charakterisierung eines linearen Systems durch Lage der Pol- und Nullstellen, Pole: \times ; Nullstellen: \circ

Die Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion sind wichtige Kenngrößen des Systemverhaltens und spielen deshalb sowohl bei der Analyse der Regelstrecke und des geschlossenen Regelkreises als auch beim Reglerentwurf eine große Rolle. Dabei wird das Eigenverhalten eines linearen Systems (also der Fall, daß $u(t) = 0$ gesetzt wird) durch die Pole der Übertragungsfunktion vollständig beschrieben. Die Eigenbewegung des Systems setzt sich aus e -Funktionen zusammen, in deren Exponenten die Pole vorkommen ($e^{p_i t}$). Eine weitere wichtige Kenngröße ist der sogenannte *Differenzgrad*, der sich aus der Differenz ($n - m$) der Ordnungen (Grade) von Nenner- und Zählerpolynom der Übertragungsfunktion ergibt.

Systeme mit Totzeit

Will man eine *Totzeit* T_t berücksichtigen, so erhält man anstatt der Gl. (2.103) die Differentialgleichung

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i}{dt^i} y(t) = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j}{dt^j} u(t - T_t) \quad . \quad (2.113)$$

Die Laplace-Transformation liefert in diesem Fall eine *transzendente* Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} e^{-T_t s} \quad . \quad (2.114)$$

Diese Systeme können vor allem mit Hilfe von Frequenzkennlinienverfahren analysiert werden.

2.6.4 Berechnung der Ausgangsgröße mit Hilfe der Übertragungsfunktion

Mit Hilfe der Übertragungsfunktion kann die Ausgangsgröße $y(t)$ für beliebige Eingangsgrößen $u(t)$ wie folgt berechnet werden (vgl. Bild 2.39):

Gegeben: Gewichts- bzw. Übertragungsfunktion $G(s)$, Eingangsgröße $u(t)$.

1. Berechnung der Laplace-Transformierten des Eingangssignals $u(t)$ unter Verwendung der Laplace-Transformation

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}.$$

2. Berechnung der Laplace-Transformierten der Ausgangsgröße aus der Laplacetransformierten der Eingangsgröße und der Übertragungsfunktion:

$$Y(s) = G(s)U(s).$$

3. Bestimmung des Ausgangssignals $y(t)$ durch inverse Laplace-Transformation

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}.$$

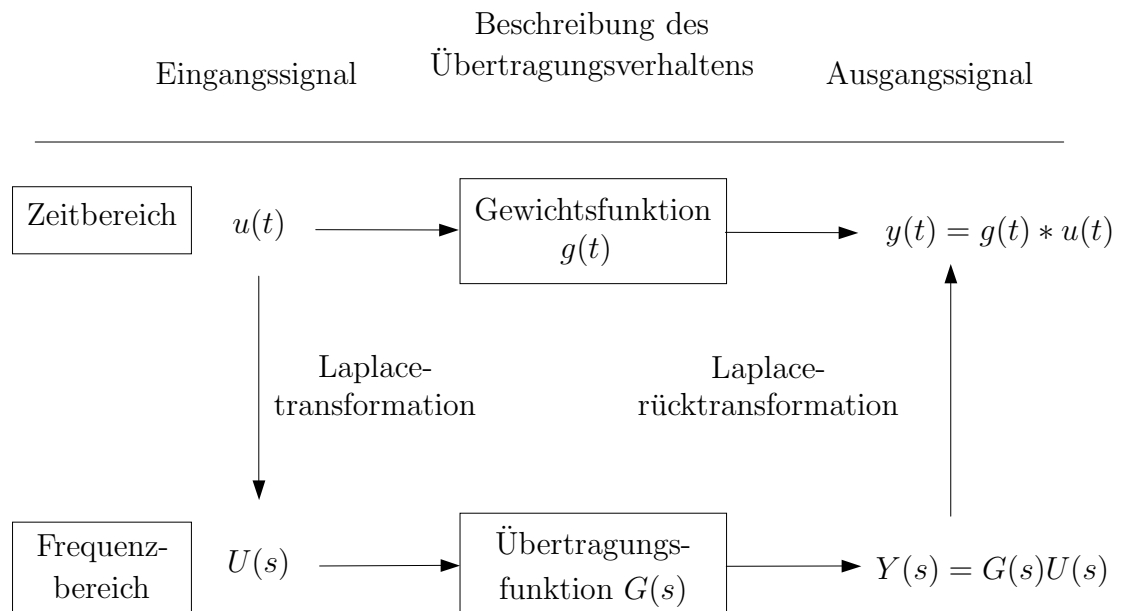


Bild 2.39: Berechnung des Systemverhaltens mit Hilfe der Laplacetransformation

2.7 Eigenschaften wichtiger Übertragungsglieder

In diesem Abschnitt werden systematisch die wichtigsten Regelkreisglieder parallel im Zeit- und im Bildbereich besprochen und ihre wesentlichen Eigenschaften und deren Kennzeichnung zusammenfassend und übersichtlich dargestellt.

a) PT_1 -System: (System mit Verzögerung 1. Ordnung)

Das PT_1 -System wird durch die Differentialgleichung

$$T_1 \dot{y}(t) + y(t) = K u(t) \quad (2.115)$$

beschrieben, aus der mittels Laplace-Transformation die komplexe Übertragungsfunktion gewonnen werden kann:

$$\left. \begin{aligned} (T_1 s + 1)Y(s) &= K U(s) \\ G(s) &= \frac{K}{1 + sT_1} \end{aligned} \right\} \quad (2.116)$$

Die Sprungantwort $h(t)$ kann dann mittels Rücktransformation über Tabelle A.2 gefunden werden, wenn das Sprungsignal als Eingangsgröße – bzw. genauer dessen Laplace-Transformierte $\mathcal{L}\{1(t)\} = \frac{1}{s}$ – berücksichtigt wird:

$$\left. \begin{aligned} h(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \cdot \frac{K}{1 + sT_1} \right\} \\ &= K (1 - e^{-t/T_1}) \cdot 1(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.117)$$

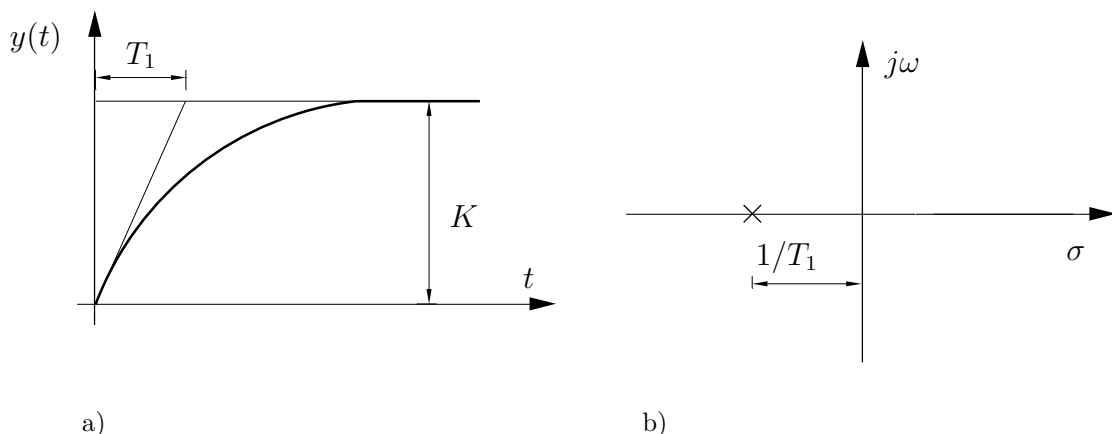


Bild 2.40: PT_1 -System: a) Sprungantwort, b) Polbild

Die Sprungantwort eines PT_1 -Systems in Bild 2.40a wird vollständig durch die Verstärkung K und die Zeitkonstante T_1 charakterisiert.

b) **PT₂-System (reelle Pole)**

Das PT₂-System wird durch die Differentialgleichung

$$T_1 T_2 \ddot{y}(t) + (T_1 + T_2) \dot{y}(t) + y(t) = K u(t) \quad (2.118)$$

beschrieben und hat im Falle reeller Eigenwerte diese Übertragungsfunktion $G(s)$ (Reihenschaltung zweier PT₁-Glieder):

$$G(s) = \frac{K}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)} \quad (2.119)$$

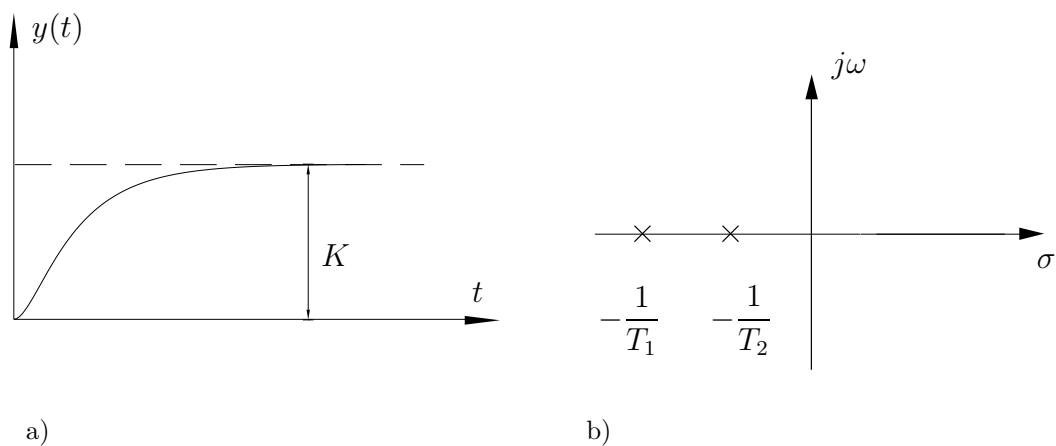


Bild 2.41: PT₂-System mit reellen Polen: a) Sprungantwort, b) Polbild

c) **PT₂-System (komplexe-Pole)**

Ist ein PT₂-System schwingungsfähig, ist es zweckmäßig, die Differentialgleichung in dieser normierten Form

$$\frac{1}{\omega_0^2} \ddot{y}(t) + \frac{2D}{\omega_0} \dot{y}(t) + y(t) = K u(t) \quad (2.120)$$

$\omega_0 =$ Eigenfrequenz des ungedämpften Schwingers;
 $D =$ Dämpfungsgrad

zu schreiben, aus der dann diese Übertragungsfunktion folgt:

$$G(s) = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{2D}{\omega_0} s + 1} \quad (2.121)$$

Die Sprungantwort und das Polbild eines schwingungsfähiges PT₂-Systems sind in Bild 2.42 dargestellt. Der Zusammenhang zwischen Dämpfungsgrad, Polbild und den Systemeigenschaften eines PT₂-Systems ist in der Tabelle 2.5 zusammengestellt.

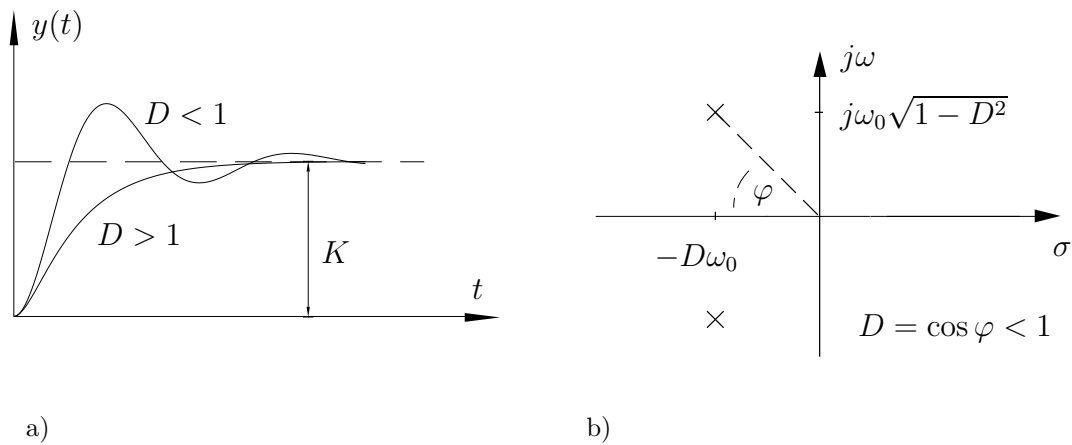


Bild 2.42: Schwingungsfähiges PT_2 -System: a) Sprungantwort, b) Polbild

Dämpfung	Systemeigenschaft	Pole
$D > 1$	überkritisch gedämpft	negative reelle Pole
$D = 1$	kritisch gedämpft	negativer reeller Doppelpol
$\frac{1}{\sqrt{2}} < D < 1$	gedämpft ohne Resonanzüberhöhung	konjugiert komplexe Pole mit negativen Realteilen
$0 < D < \frac{1}{\sqrt{2}}$	gedämpft mit Resonanzüberhöhung	konjugiert komplexe Pole mit negativen Realteilen
$D = 0$	ungedämpft	konjugiert komplexe Pole mit verschwindenden Realteilen
$-1 < D < 0$	instabil	konjugiert komplexe Pole mit positiven Realteilen
$D = -1$	instabil	positiv reeller Doppelpol
$D < -1$	instabil	positive reelle Pole

Tabelle 2.5: Verhalten von PT_2 -Systemen

d) **PT_n-Systeme**

Die PT_n-Systeme (Reihenschaltung von n PT₁-Gliedern) werden durch eine Differentialgleichung n -ter Ordnung beschrieben:

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_2 \ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + y(t) = K u(t) \quad . \quad (2.122)$$

Die komplexe Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{K}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n} \quad (2.123)$$

hat n Pole, die in die s -Ebene eingetragen werden können.

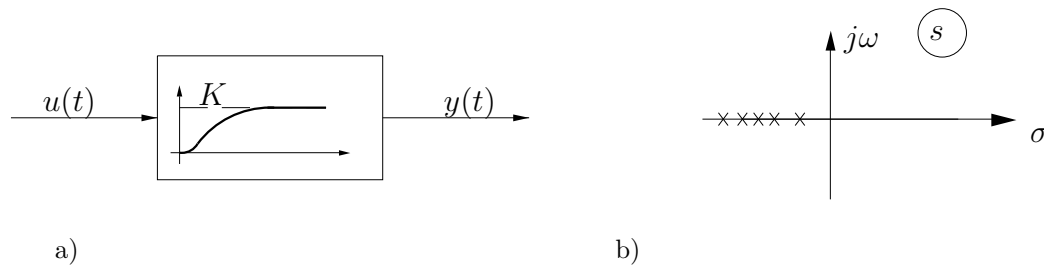


Bild 2.43: PT_n-System: a) Sprungantwort, b) Pole in der s -Ebene

e) **I-Systeme**

Systeme, deren Ausgang das Integral des Systemeinganges ist, treten als Regelstrecken in Form der Strecken ohne Selbstausgleich (Füllstand, Antriebsregelstrecke, Lageregelung von Fahrzeugen) und als Regler auf und werden in Abhängigkeit der (zusätzlichen) Verzögerungen im Zeitbereich beschrieben durch

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_2 \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = K_I u(t). \quad (2.124)$$

Die zugehörige Übertragungsfunktion ist durch einen Pol im Ursprung ($s = 0$) gekennzeichnet:

$$\left. \begin{aligned} G(s) &= \frac{K_I}{s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n} \\ &= \frac{K_I}{s} \cdot \frac{1}{(1 + \bar{a}_1 s + \dots + \bar{a}_{n-1} s^{n-1})} \end{aligned} \right\} \quad (2.125)$$

mit $\bar{a}_v = a_{v+1}$, $v = 1, 2, \dots, n - 1$

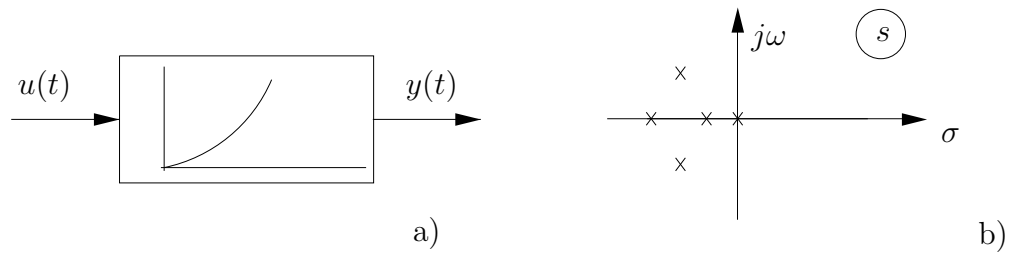


Bild 2.44: I-System mit Verzögerung: a) Sprungantwort, b) Pole in der s -Ebene

f) **D-Systeme**

Das verzögerungsfreie D -Glied wird durch die Gleichung

$$y(t) = T_D \dot{u}(t) \tag{2.126}$$

beschrieben und hat die Übertragungsfunktion

$$G(s) = T_D s \tag{2.127}$$

und die Übergangsfunktion

$$h(t) = T_D \delta(t). \tag{2.128}$$

Aus der Differentialgleichung eines D -Gliedes erster Ordnung mit Verzögerung (Bild 2.45)

$$T \dot{y}(t) + y(t) = T_D \dot{u}(t) \tag{2.129}$$

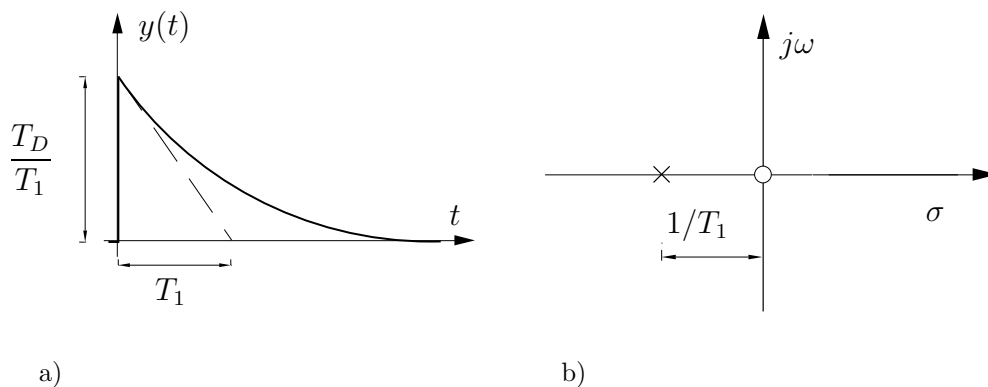


Bild 2.45: DT_1 -System: a) Sprungantwort, b) Pol- Nullstellenbild

erhält man die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{T_D s}{T s + 1} \quad (2.130)$$

und die Übergangsfunktion

$$h(t) = \frac{T_D}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}}. \quad (2.131)$$

g) **PD–Systeme**

PD–Glieder weisen sowohl ein proportionales als auch ein differenzierendes Übertragungsverhalten auf:

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = K (u(t) + T_D \dot{u}(t)) \quad (2.132)$$

Die Übertragungsfunktion hat die Form

$$G(s) = \frac{K (1 + sT_D)}{(1 + sT_1)(1 + sT_2) \dots (1 + sT_n)} \quad (2.133)$$

Ein PD–Glieder ohne Verzögerung mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = K(1 + sT_D) \quad (2.134)$$

kann aus der Parallelschaltung eines P– und eines D–Gliedes gebildet werden (Bild 2.46) und stellt abgesehen vom Verstärkungsfaktor K das zum PT₁–Glieder inverse

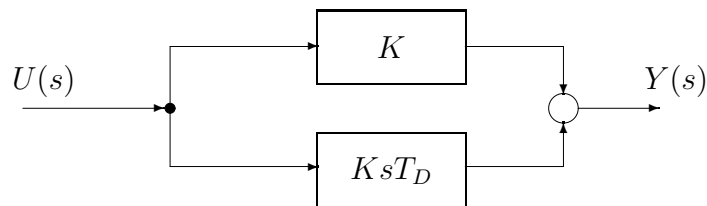


Bild 2.46: PD–Glieder als Parallelschaltung eines P– und eines D–Gliedes
Glieder dar.

h) **PI–Systeme**

Diese Systeme genügen der Differential–Integralgleichung

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 \dot{y}(t) + y(t) = K \left(u(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t u(\tau) d\tau \right) \quad (2.135)$$

bzw. nach Differentiation der Differentialgleichung

$$a_n y^{(n+1)}(t) + \dots + a_1 \dot{y}(t) + y(t) = K \left(\dot{u}(t) + \frac{1}{T_I} u(t) \right) \quad (2.136)$$

mit der Übertragungsfunktion

$$\begin{aligned} G(s) &= K \left(1 + \frac{1}{sT_I} \right) \frac{1}{(1 + sT_1)(1 + sT_2) \cdots (1 + sT_n)} \\ &= \frac{K}{sT_I} \frac{(1 + sT_I)}{(1 + sT_1)(1 + sT_2) \cdots (1 + sT_n)} \end{aligned} \quad (2.137)$$

Diese Systeme treten vor allem in der Form des idealen PI-Reglers (ohne Verzögerung) (Bild 2.47)

$$G(s) = K \left(1 + \frac{1}{sT_I} \right) = K \left(\frac{sT_I + 1}{sT_I} \right)$$

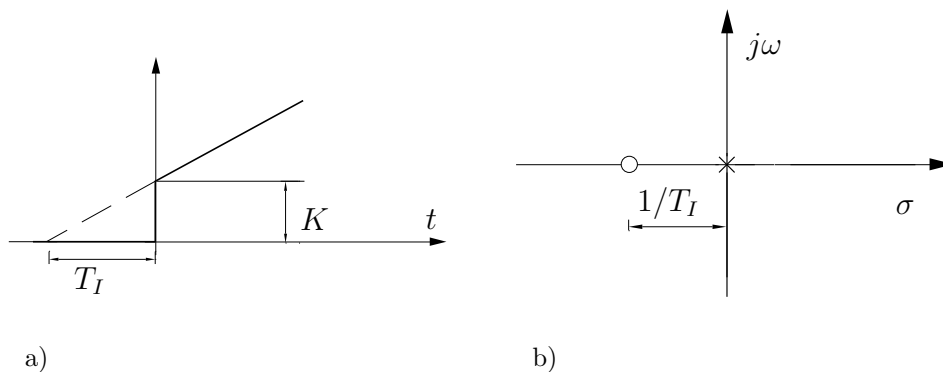


Bild 2.47: PI-System: a) Sprungantwort, b) Pol- Nullstellenbild

und des PIT₁-Reglers mit Verzögerung 1. Ordnung auf (Bild 2.48)

$$G(s) = K \left(1 + \frac{1}{sT_I} \right) \frac{1}{(1 + sT_1)} .$$

i) PID-Systeme

Das PID-System tritt vorwiegend in der Form des PID-Reglers ohne und mit Verzögerung 1. Ordnung auf.

$$T_1 \dot{y}(t) + y(t) = K \left(u(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t u(\tau) d\tau + T_D \dot{u}(t) \right) \quad (2.138)$$

$$T_1 \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = K \left(T_D \ddot{u}(t) + \dot{u}(t) + \frac{1}{T_I} u(t) \right) \quad (2.139)$$

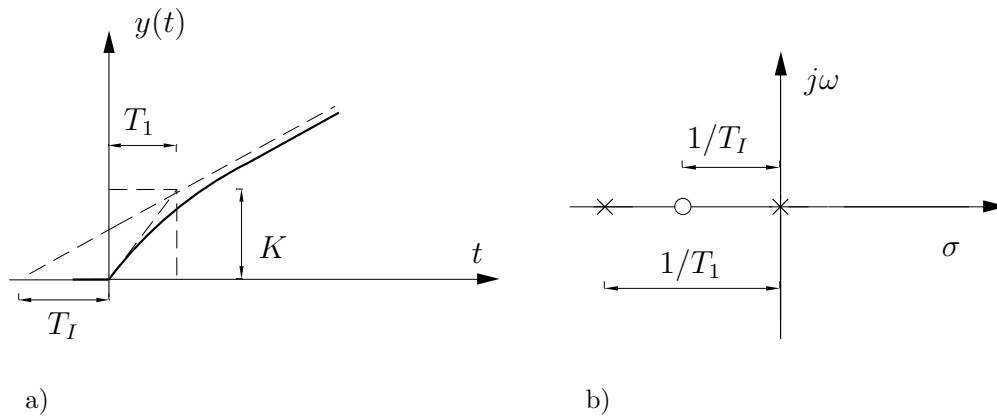


Bild 2.48: PIT₁-System: a) Sprungantwort, b) Pol- Nullstellenbild

$$\begin{aligned} \text{mit } G(s) &= K \left(1 + \frac{1}{sT_I} + sT_D \right) \frac{1}{1 + sT_1} \\ &= \frac{K}{sT_I} \frac{(1 + T_a s)(1 + T_b s)}{(1 + sT_1)}, \end{aligned} \quad (2.140)$$

wobei T_a und T_b mit T_I und T_D wie folgt zusammenhängen:

$$T_{a/b} = \frac{T_I}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4T_D}{T_I}} \right). \quad (2.141)$$

Ein verzögerungsfreies PID-Glied mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = K \left(1 + \frac{1}{sT_I} + sT_D \right)$$

läßt sich wiederum als Parallelschaltung je eines P-, I- und D-Gliedes darstellen (Bild 2.49).

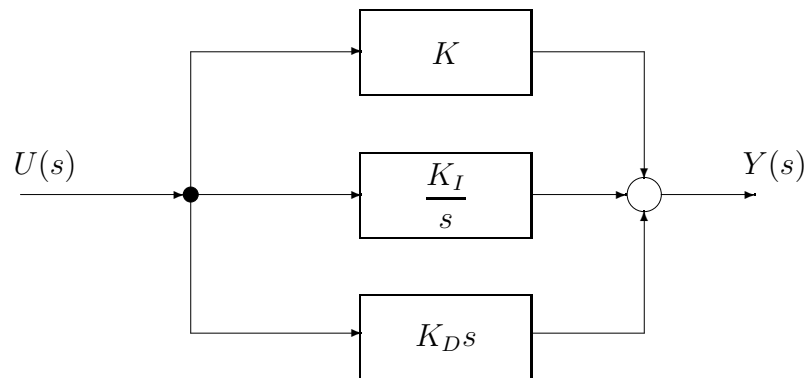


Bild 2.49: Blockschaltbild eines PID-Systems

Hierbei gilt

$$K_I = \frac{K}{T_I}$$

und

$$K_D = K T_D .$$

In der Sprungantwort des idealen PID-Systems im Bild 2.50a sind die Anteile der 3 Grundsysteme klar zu erkennen. Die Sprungantwort des technisch realisierbaren

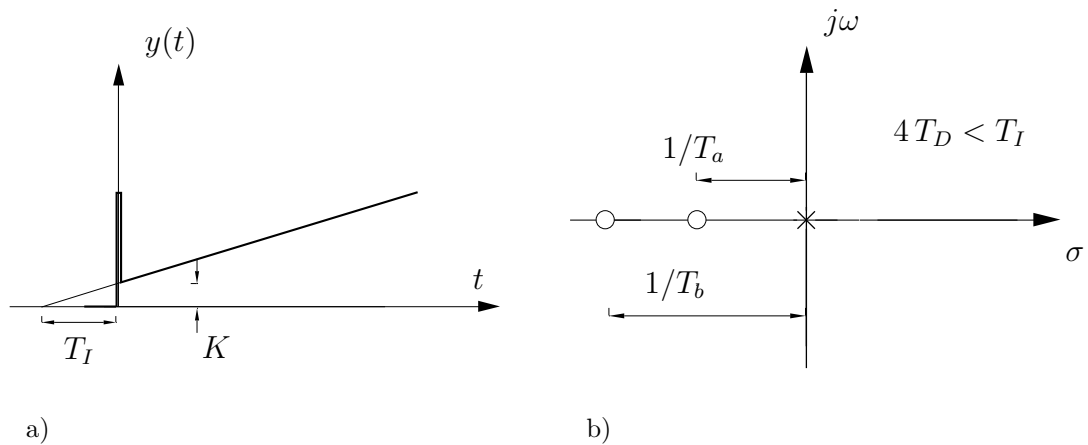


Bild 2.50: PID-System: a) Sprungantwort, b) Pol- Nullstellenbild

PID-Systems (2.140) – Reihenschaltung von idealem PID- und PT_1 -System – ist in Bild 2.51a) dargestellt.

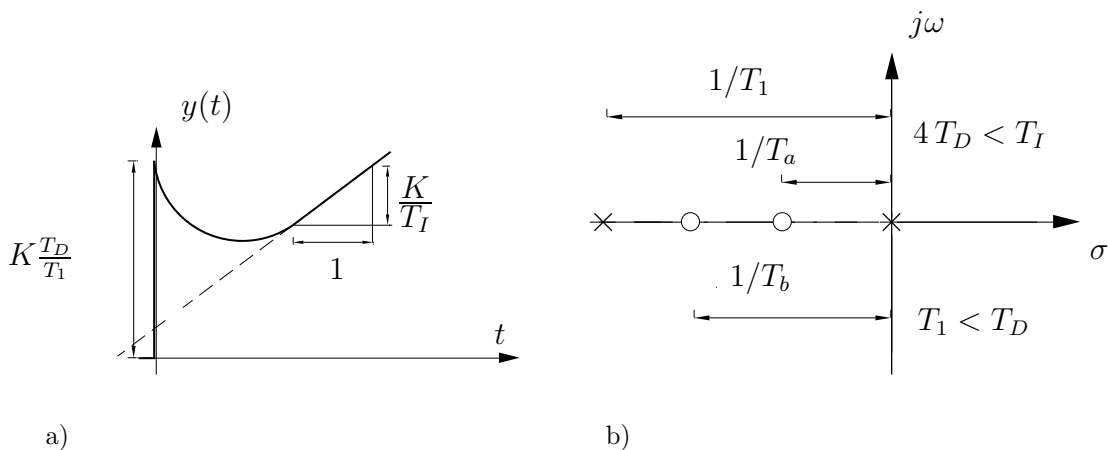


Bild 2.51: PIDT₁-System: a) Sprungantwort, b) Pol- Nullstellenbild

In der Tabelle 2.6 sind die zuvor besprochenen Standardübertragungsglieder der Regelungstechnik noch einmal zusammengestellt.

Tabelle 2.6: Verhalten der wichtigsten Regelkreisglieder

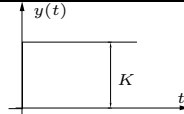
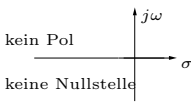
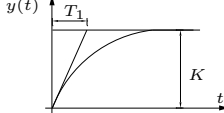
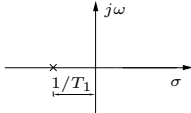
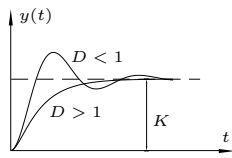
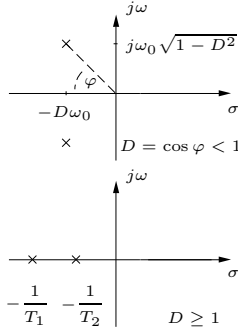
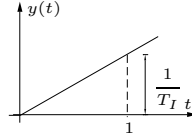
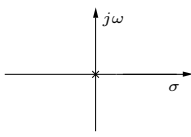
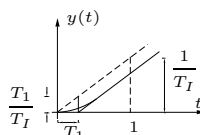
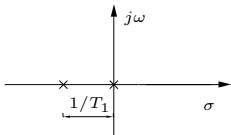
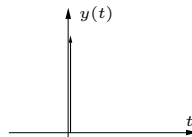
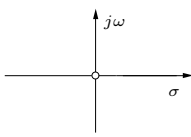
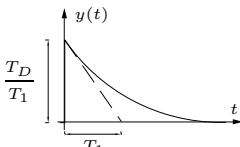
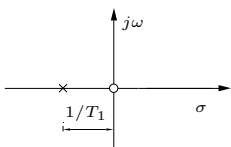
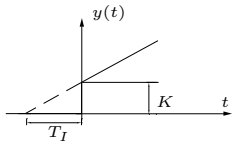
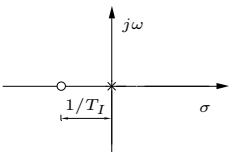
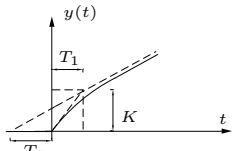
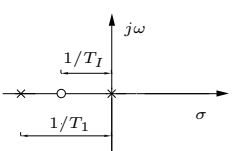
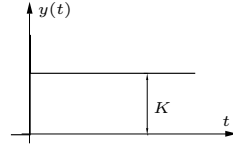
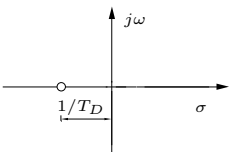
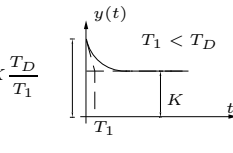
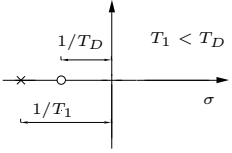
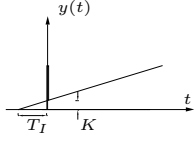
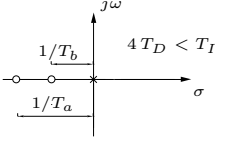
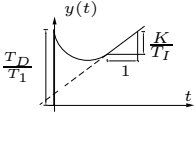
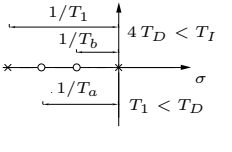
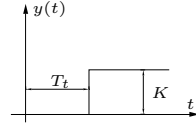
System	Zeitbereich Bildbereich (Übertragungsfkt.)	Übergangsfunktion	s-Ebene × Pol ○ Nullstelle
P	$y(t) = K u(t)$ $G(s) = K$		kein Pol keine Nullstelle 
PT_1	$T_1 \dot{y}(t) + y(t) = K u(t)$ $G(s) = K \frac{1}{1 + T_1 s}$		
PT_2	$\frac{1}{\omega_0^2} \ddot{y}(t) + \frac{2D}{\omega_0} \dot{y}(t) + y(t) = K u(t)$ $G(s) = K \frac{1}{\frac{1}{\omega_0^2} s^2 + \frac{2D}{\omega_0} s + 1}$ $D < 1$: konjugiert komplexe Wurzeln der char. Gleichung $\lambda_{1,2} = -\omega_0(D \pm j\sqrt{1-D^2})$ $D \geq 1$: reelle Wurzeln der char. Gleichung $\lambda_{1,2} = -\omega_0(D \pm \sqrt{D^2-1}) = -1/T_{1,2}$		
I	$y(t) = \frac{1}{T_I} \int u dt$ $G(s) = \frac{1}{T_I s}$		
IT_1	$T_1 \dot{y}(t) + y(t) = \frac{1}{T_I} \int u(t) dt$ $G(s) = \frac{1}{T_I s(1 + T_1 s)}$		
D	$y(t) = T_D \frac{du}{dt}$ $G(s) = T_D s$		
DT_1	$T_1 \dot{y}(t) + y(t) = T_D \frac{du}{dt}$ $G(s) = T_D \frac{s}{1 + T_1 s}$		

Tabelle 2.6: Fortsetzung

System	Zeitbereich Bildbereich (Übertragungsfkt.)	Übergangsfunktion	s-Ebene × Pol ○ Nullstelle
PI	$y(t) = K \left[u(t) + \frac{1}{T_I} \int u(t) dt \right]$ $G(s) = K \left[1 + \frac{1}{T_I s} \right]$		
PIT_1	$T_1 \dot{y}(t) + y(t) =$ $K \left[u(t) + \frac{1}{T_I} \int u dt \right]$ $G(s) = K \frac{1 + \frac{1}{T_I s}}{1 + T_1 s}$		
PD	$y(t) = K [u(t) + T_D \dot{u}(t)]$ $G(s) = K [1 + T_D s]$		
PDT_1	$T_1 \dot{y}(t) + y(t) =$ $K [u(t) + T_D \dot{u}(t)]$ $G(s) = K \frac{1 + T_D s}{1 + T_1 s}$		
PID	$y(t) = K \left[u(t) + \frac{1}{T_I} \int u dt + T_D \frac{du}{dt} \right]$ $G(s) = K \left[1 + T_D s + \frac{1}{T_I s} \right]$		
$PIDT_1$	$T_1 \dot{y}(t) + y(t) =$ $K \left[u(t) + \frac{1}{T_I} \int u dt + T_D \frac{du}{dt} \right]$ $G(s) = K \frac{1 + T_D s + \frac{1}{T_I s}}{1 + T_1 s}$		
T_t	$y(t) = K u(t - T_t)$ $G(s) = K e^{-s T_t}$		Pole bei $-\infty$ Nullstellen bei $+\infty$

2.8 Zusammenfassung zur Beschreibung dynamischer Systeme im Bildbereich

- a) Die in der Regelungstechnik interessierenden (linearen) Übertragungsglieder (Regelstrecken und Regler) werden überwiegend durch eine gebrochene rationale Funktion $G(s) = Z(s)/N(s)$ im Bildbereich beschrieben. Hat ein System eine zusätzliche Totzeit, dann tritt noch die transzendente Funktion e^{-sT_t} hinzu:

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} \cdot e^{-sT_t} \quad (2.142)$$

- b) Das Nennerpolynom der Übertragungsfunktion ist das **charakteristische Polynom** des Systems. Die charakteristische Gleichung ist also

$$N(s) = 0 \quad , \quad (2.143)$$

da diese Gleichung der algebraisierten homogenen Differentialgleichung des Systems entspricht und die Eigenbewegungen des Systems bestimmt.

- c) Bei einem stabilen System müssen alle Nullstellen von $N(s)$, also alle Pole von $G(s)$ negative Realteile haben.
- d) Je größer die Beträge der Realteile der Pole von $G(s)$ sind, umso kleiner sind die zugehörigen, die Verzögerungen bestimmenden Zeitkonstanten.
- e) Dicht am Ursprung der s -Ebene liegende Pole (große Zeitkonstanten) können mit Hilfe von Kompensationsgliedern bekämpft werden. Kompensationsglieder müssen Nullstellen an den Stellen der s -Ebene haben, wo sich störende Pole befinden. Pole in der Nähe der j -Achse werden gegen weiter entfernt liegende eingetauscht (Bild 2.52).

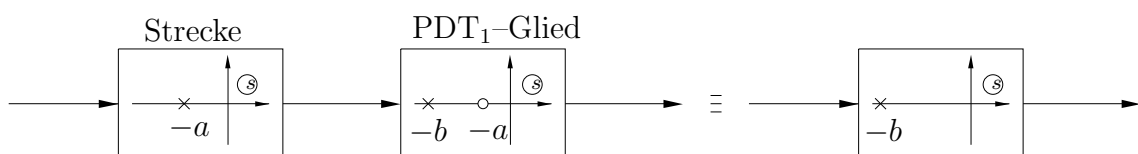


Bild 2.52: Beispiel einer Polkompensation (Polverschiebung) mittels PDT₁-Glieder

- f) Polkompensation ist **nur** in der linken s -Halbebene, also nur für **stabile Pole** möglich.
- g) Die Lage der Nullstellen der Übertragungsfunktion hat einen wesentlichen Einfluß auf das Übergangsverhalten eines Systems (Allpaßverhalten).

3 Analyse des Regelkreises

Nach Einführung der Kennfunktionen des Übertragungsverhaltens im Zeitbereich und im Bildbereich kann die in Abschnitt 1.6 beschriebene Regelungsaufgabe konkretisiert werden:

Regelungsaufgabe

Gegeben sind:

1. das Modell der Regelstrecke als Zustandsraummodell oder Übertragungsfunktion.
2. Forderungen an das Verhalten des geregelten Systems.

Gesucht ist ein Regelgesetz, für das der aus Regelstrecke und Regler gebildete Regelkreis die gegebenen Güteanforderungen erfüllt.

3.1 Modell des Standardregelkreises

Für die weiteren Untersuchungen wird der in Bild 3.1 dargestellte Standardregelkreis betrachtet. Neben den in Bild 1.8 bereits eingeführten Größen steht $R(s)$ für ein Meßrauschen, das die Regelgröße $Y(s)$ überlagert.

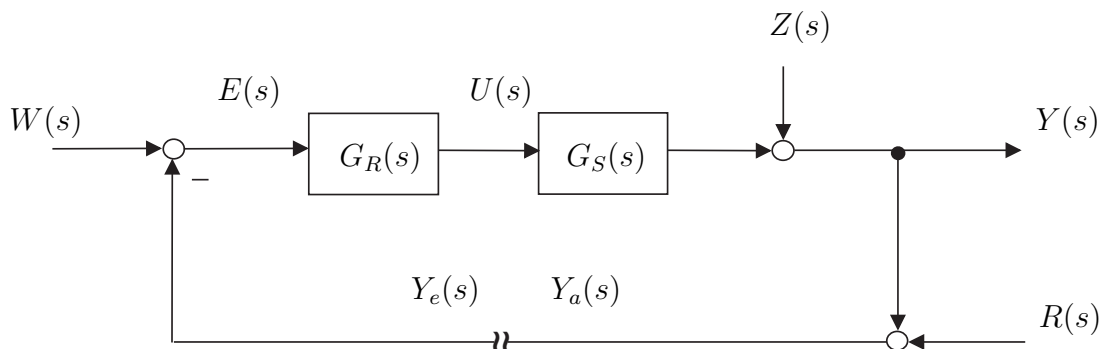


Bild 3.1: Blockschaltbild des Standardregelkreises

Anhand des Standardregelkreises in Bild 3.1 lassen sich die folgenden Übertragungsfunktionen bestimmen:

- a) die Übertragungsfunktion $G_0(s)$ des offenen Systems
- b) die Führungsübertragungsfunktion $G_w(s)$
- c) die Störübertragungsfunktion $G_z(s)$

a) Die Übertragungsfunktion $G_0(s)$ und Rückführdifferenz $D(s)$

Es wird das in Bild 3.1 gezeigte System als aufgeschnitten (offen) und an der Schnittstelle die Eingangsvariable $Y_e(s)$ und die dorthin zurückkehrende Ausgangsvariable $Y_a(s)$ betrachtet, wobei mit $z = r = w = 0$ gilt:

$$Y_a(s) = -G_S(s)G_R(s)Y_e(s) \quad (3.1)$$

$$G_0(s) = G_S(s)G_R(s) = \frac{Z_0(s)}{N_0(s)} = \frac{Z_S(s)Z_R(s)}{N_S(s)N_R(s)}. \quad (3.2)$$

Wird das System mit $Y_e(s) = 1$ erregt, ist $Y_a = -G_0(s)$. Das Differenzsignal

$$D(s) = 1 - Y_a(s) = 1 + G_0(s) \quad (3.3)$$

heißt **Rückführdifferenz**.

b) Führungsübertragungsfunktion $G_w(s)$

Nun wird die Schnittstelle geschlossen, und mit $z = r = 0; w \neq 0$ gilt:

$$Y(s) = G_0(s)[W(s) - Y(s)] = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)}W(s). \quad (3.4)$$

Der Ausdruck

$$G_W(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} \quad (3.5)$$

ist die Führungsübertragungsfunktion und beschreibt das *Führungsverhalten* des geschlossenen Regelkreises.

c) Störübertragungsfunktion $G_z(s)$

Mit $z \neq 0$ und $w = r = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} Y(s) &= Z(s) + G_S(s)U(s) = Z(s) - G_S(s)G_R(s)Y(s) \\ &= \frac{1}{1 + G_0(s)}Z(s) \quad . \end{aligned} \quad (3.6)$$

Der Ausdruck

$$G_z(s) = \frac{Y(s)}{Z(s)} = \frac{1}{1 + G_0(s)} \quad (3.7)$$

ist die Störübertragungsfunktion und beschreibt das *Störverhalten* des geschlossenen Regelkreises.

Für $z \neq 0$, $w \neq 0$ und $r \neq 0$ hängt die Regelgröße $Y(s)$ von $Z(s)$, $W(s)$ und $R(s)$ wie folgt ab:

$$Y(s) = \frac{1}{1 + G_0(s)} Z(s) + \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} W(s) - \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} R(s). \quad (3.8)$$

Alle aufgestellten Übertragungsfunktionen besitzen den Faktor

$$S(s) = \frac{1}{1 + G_0(s)}, \quad (3.9)$$

der *Empfindlichkeitsfunktion* oder auch *dynamischer Regelfaktor* genannt wird. $S(s)$ stimmt offensichtlich mit der Störübertragungsfunktion $G_z(s)$ überein. Die zu $S(s)$ komplementäre Empfindlichkeitsfunktion ($S(s) + T(s) = 1$)

$$T(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} \quad (3.10)$$

stimmt mit der Führungsübertragungsfunktion $G_w(s)$ überein, so daß

$$G_z(s) + G_w(s) = 1 \quad (3.11)$$

gilt. Schreibt man Gl. (3.8) mit Hilfe von $S(s)$ und $T(s)$

$$Y(s) = S(s)Z(s) + T(s)W(s) - T(s)R(s), \quad (3.12)$$

dann erkennt man, daß durch Wahl des Reglers $G_R(s)$ das Störverhalten bezüglich $R(s)$ und $Z(s)$ nicht unabhängig vom Führungsverhalten beeinflusst werden kann. Für jede Regelungsaufgabe muß deshalb ein Kompromiß zwischen dem Stör- und dem Führungsverhalten gesucht werden.

3.2 Stationäres Verhalten des Regelkreises

Die erste Güteanforderung, die jeder geschlossene Regelkreis erfüllen muß, ist die der Stabilität. Darüber hinaus wird erwartet, daß der Regelkreis die auftretenden Störungen kompensiert und den Sollwert zumindest in endlicher Zeit erreicht. Diese Entwurfsforderung kann allerdings nicht für beliebige Eingangssignale erfüllt werden. Es wird sich zeigen, daß das Modell der Stör- und Führungssignale im Regler bzw. im offenen Kreis erscheinen muß. Je größer die Klasse der auftretenden Signale ist, umso komplizierter wird also das Regelgesetz. Beim Entwurf einer Regelung sollten daher nur die unbedingt notwendigen Signalklassen betrachtet werden.

Für praktische Anwendungen sind sprungförmige Stör- und Führungssignale von besonderem Interesse, da sie eine Standardsituation repräsentieren, die bei vielen regelungstechnischen Aufgaben wenigstens näherungsweise auftritt.

3.2.1 Stationäres Verhalten bei sprungförmiger Erregung

Unter der Voraussetzung, daß der geschlossene Regelkreis stabil ist, erhält man für eine sprungförmige Führungsgröße $w(t) = 1(t)$ im störungsfreien Fall ($z(t) = r(t) = 0$) aus dem Grenzwertsatz der Laplacetransformation für das Führungsverhalten die Beziehung

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (w(t) - y(t)) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s(W(s) - Y(s)) .\end{aligned}$$

Mit Gl. (3.12) und $W(s) = \frac{1}{s}$ erhält man dann

$$\lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s(W(s) - T(s)W(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} sS(s)W(s) \quad (3.13)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G_0(s)} . \quad (3.14)$$

Das Verhalten bei sprungförmigen Störungen $z(t) = 1(t)$ und $w(t) = r(t) = 0$ ergibt sich aus Bild 3.1 zu

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = - \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = - \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) . \quad (3.15)$$

Aus Gl. (3.12) mit $Z(s) = \frac{1}{s}$ folgt dann

$$\lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = - \lim_{s \rightarrow 0} sS(s)Z(s) \quad (3.16)$$

$$= - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G_0(s)} . \quad (3.17)$$

Das bedeutet, daß die bleibende Regelabweichung $e(\infty)$ in beiden Fällen betragsmäßig gleich groß ist und von der Übertragungsfunktion $G_0(s)$ des offenen Kreises für $s \rightarrow 0$ abhängt.

Zur Diskussion der Frage, wie der Typ der Übertragungsfunktion $G_0(s)$ die bleibende Regelabweichung beeinflußt, wird $G_0(s)$ in folgender Form dargestellt:

$$G_0(s) = \frac{k}{s^l} \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_ms^m}{a_0 + a_1s + \dots + a_{n-l}s^{n-l}} \quad (3.18)$$

wobei $n \geq m$ gilt und das Restpolynom im Nenner vom Grad $n - l$ keine Nullstellen bei $s = 0$ haben soll.

Proportionales Verhalten des offenen Kreises

Für $l = 0$ hat der offene Kreis ein verzögertes, proportionales Verhalten mit der Verstärkung

$$\lim_{s \rightarrow 0} G_0(s) = K_0 = k \frac{b_0}{a_0} \quad (3.19)$$

Damit ergibt sich die bleibende Regelabweichung $e_\infty = e(\infty)$ des geschlossenen Regelkreises bei *sprungförmiger Erregung* $1(t)$ zu

$$e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{1}{1 + K_0}. \quad (3.20)$$

Je größer die Verstärkung des offenen Kreises – auch *Kreisverstärkung* genannt – ist, umso kleiner ist die bleibende Regelabweichung.

Integrales Verhalten des offenen Kreises

Für $l \geq 1$ hat der offene Regelkreis integrales Verhalten mit

$$\lim_{s \rightarrow 0} G_0(s) = \infty$$

und eine bleibende Regelabweichung

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G_0(s)} = 0. \quad (3.21)$$

Der geschlossene Regelkreis hat also aufgrund des integralen Verhaltens des offenen Kreises für sprunghörmige Führungs- und Störsignale keine bleibende Regelabweichung.

3.2.2 Stationäres Verhalten bei rampenförmiger Erregung

In diesem Abschnitt wird untersucht in welcher Form das stationäre Verhalten des geschlossenen Regelkreises auch von den Eigenschaften des Stör- bzw. Führungssignals beeinflusst wird. Hierzu wird zunächst ein rampenförmiges Führungssignal $w(t) = t1(t)$ im störungsfreien Fall ($z(t) = r(t) = 0$) betrachtet. Mit Hilfe der Gl. (3.13) und $W(s) = \frac{1}{s^2}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) &= \lim_{s \rightarrow 0} sS(s)W(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G_0(s)} \cdot \frac{1}{s}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Für den Fall, daß der offene Kreis ein proportionales Verhalten mit der Verstärkung K_0 (vgl. Gl. (3.19)) hat, ergibt sich die bleibende Regelabweichung aus Gl. (3.22) zu

$$e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \rightarrow \infty. \quad (3.23)$$

Besitzt der offene Regelkreis ein integrales Verhalten mit $l = 1$, so erhält man

$$\begin{aligned} e_\infty &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G_0(s)} \cdot \frac{1}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + G_0(s)s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + K_0} = \frac{1}{K_0}. \end{aligned}$$

Für rampenförmige Störsignale ergeben sich, wie im Abschnitt zuvor, betragsmäßig die gleichen bleibenden Regelabweichungen.

Die Abhängigkeit der bleibenden Regelabweichung des geschlossenen Regelkreises von Systemtyp und Art der Anregung ist für die gebräuchlichsten Testfunktionen in Tabelle 3.1 zusammengestellt.

Systemtyp $G_0(s)$	Sprung $1(t)$	Rampe $t1(t)$	Parabel $t^21(t)$
P-Verhalten ($l = 0$)	$\frac{1}{1 + K_0}$	∞	∞
I-Verhalten ($l = 1$)	0	$\frac{1}{K_0}$	∞
I ₂ -Verhalten ($l = 2$)	0	0	$\frac{1}{K_0}$

Tabelle 3.1: Bleibende Regelabweichung e_∞ für verschiedene Systemtypen und unterschiedliche Eingangsfunktionen.

Aus den Ergebnissen sowie aus Tabelle 3.1 folgt, daß das durch die bleibende Regelabweichung charakterisierte statische Verhalten des Regelkreises in allen Fällen, wo eine endliche Regelabweichung auftritt, umso besser ist, je größer die Kreisverstärkung K_0 gewählt wird. Je nach Art der Anregung (Sprung, Rampe, Parabel) spricht man auch von *Lage-*, *Geschwindigkeits-* und *Beschleunigungsfehler*.

Alle Betrachtungen waren bisher unabhängig von konkreten Parameterwerten und setzen nur die Stabilität des geschlossenen Regelkreises voraus. Offensichtlich besitzt der geschlossene Regelkreis ein bemerkenswertes robustes Stör- und Führungsverhalten, da der geschlossene Kreis bei sprungförmigen Eingangssignalen beispielsweise keine bleibende Regelabweichung hat, solange der offene Kreis integrales Verhalten besitzt und stabil ist. Allerdings kann eine zu große Kreisverstärkung schnell zur Instabilität des geschlossenen Regelkreises führen. Daher ist bei der Festlegung von K_0 immer ein Kompromiß zwischen Regelgüte und Robustheit zu treffen.

3.3 Stabilität dynamischer Systeme

In diesem Abschnitt wird die Stabilität dynamischer Systeme näher behandelt. Hierzu werden zunächst folgende allgemeine Stabilitätsdefinitionen eingeführt.

Definition 3.1 (*Stabilität*)

- i) Eine **Ruhelage** eines dynamischen Systems heißt (*asymptotisch*) **stabil**, wenn das System nach Auslenkung aus der Ruhelage selbsttätig in die Ruhelage zurückkehrt (Bild 3.2).

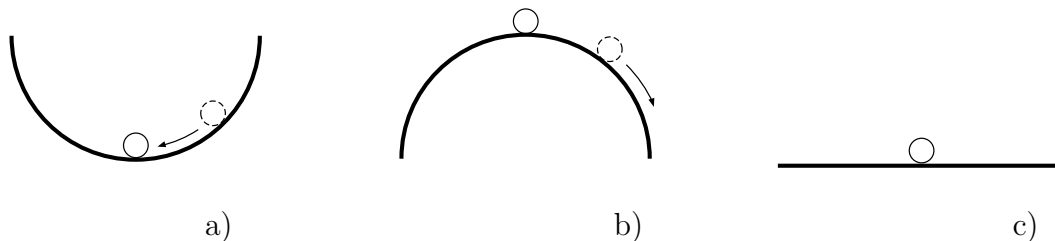


Bild 3.2: Stabilität von Ruhelagen

a) stabile Ruhelage b) instabile Ruhelage c) indifferente Ruhelage

- ii) Ein System heißt (BIBO-)¹ stabil, wenn sein Ausgangssignal $y(t)$ für alle t beschränkt ist für alle beschränkten Eingangssignale $u(t)$:

$$|u(t)| \leq N < \infty \Rightarrow |y(t)| \leq M < \infty, \forall t; N, M \text{ beliebig und fest} \quad (3.24)$$

□

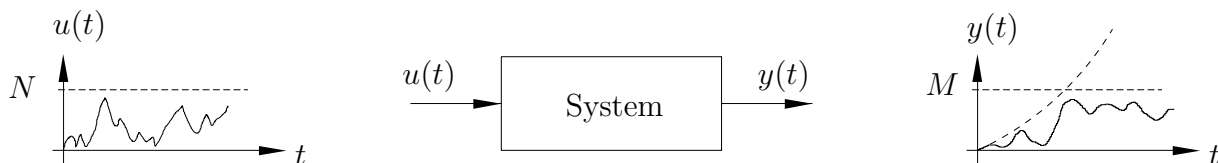


Bild 3.3: Zur BIBO-Stabilität: - - - - Ausgangssignal eines stabilen, - · - · - eines instabilen Systems

Wendet man die Definition 3.1 i) auf ein lineares, zeitinvariantes Übertragungssystem an, so führt dies auf:

Definition 3.2 (*Stabilität eines linearen Systems*)

Eine lineares, zeitinvariantes Übertragungssystem heißt **asymptotisch stabil**, wenn seine Gewichtsfunktion auf Null abklingt, d.h. wenn

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0 \quad (3.25)$$

gilt.

¹ Bounded Input Bounded Output

Ein System nennt man *instabil*, wenn die Gewichtsfunktion betragsmäßig mit wachsendem t gegen Unendlich geht. Als Sonderfall gelten solche Systeme, bei denen der Betrag der Gewichtsfunktion mit wachsendem t einen endlichen Wert nicht überschreitet. Derartige Systeme (z.B. I-Glied, PT₂-System mit $D = 0$) werden *grenzstabil* genannt.

Diese Definition der Stabilität zeigt, daß bei linearen Systemen die Stabilität eine Systemeigenschaft ist, da die Gewichtsfunktion das Systemverhalten vollständig beschreibt. Mit Hilfe der Laplace-Transformierten der Gewichtsfunktion, der Übertragungsfunktion $G(s)$, läßt sich die Stabilität analytisch formulieren.

Hierzu betrachtet man die Partialbruchzerlegung der Übertragungsfunktion (siehe Anhang A.5). Die Nenner der Partialbruchterme sind dann die Pole der Übertragungsfunktion. Sie bestimmen im Zeitbereich die Eigenbewegungsformen, wobei die folgenden Korrespondenzen eine Rolle spielen (vgl. Korrespondenztabelle A.2):

$$\begin{aligned} \frac{1}{s+a} & \circ\text{---}\bullet e^{-at} \\ \frac{1}{(s+a)^2} & \circ\text{---}\bullet te^{-at} \\ \frac{1}{(s+a)^n} & \circ\text{---}\bullet \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at} \\ \frac{\omega}{(s+\delta)^2+\omega^2} & \circ\text{---}\bullet e^{-\delta t}\sin\omega t \\ \frac{s+\delta}{(s+\delta)^2+\omega^2} & \circ\text{---}\bullet e^{-\delta t}\cos\omega t \end{aligned}$$

Alle Terme der Partialbruchzerlegung streben im Zeitbereich für $t \rightarrow \infty$ genau dann gegen Null, wenn die Größen a bzw. δ positiv sind. Diese Überlegung macht deutlich, daß die Gl. (3.25) genau dann erfüllt ist, wenn sämtliche Pole von $G(s)$ einen negativen Realteil haben.

Zur Analyse der Stabilität eines linearen Systems ist es also erforderlich, die Pole der Übertragungsfunktion $G(s)$, d.h. die Wurzel p_i seiner charakteristischen Gleichung

$$C(s) = R(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0, \quad (3.26)$$

zu überprüfen. Mit Hilfe der charakteristischen Gleichung lassen sich notwendige und hinreichende Stabilitätsbedingungen wie folgt formulieren:

a) **Asymptotische Stabilität**

Ein lineares Übertragungssystem ist genau dann asymptotisch stabil, wenn für die Wurzeln p_i seiner charakteristischen Gleichung

$$\operatorname{Re} p_i < 0 \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

erfüllt ist.

b) **Instabilität**

Ein lineares System ist genau dann instabil, wenn mindestens ein Pol seiner Übertragungsfunktion in der rechten s -Halbebene liegt, oder wenn mindestens ein mehrfacher Pol auf der Imaginärachse der s -Ebene vorhanden ist.

c) **Grenzstabilität**

Ein lineares System ist genau dann grenzstabil, wenn kein Pol der Übertragungsfunktion in der rechten s -Halbebene liegt, keine mehrfachen Pole auf der Imaginärachse auftreten und auf dieser mindestens ein *einfacher* Pol vorhanden ist.

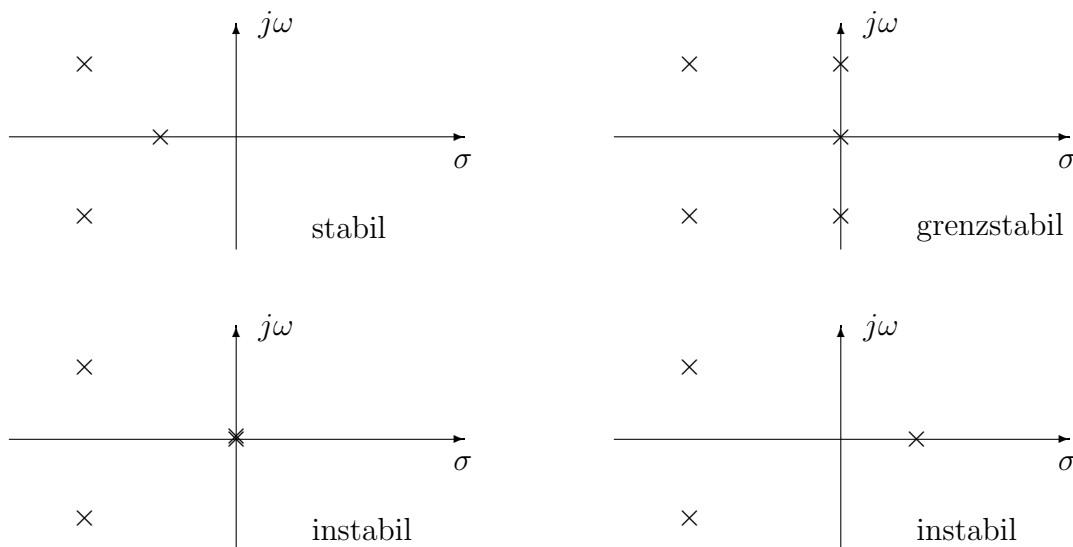


Bild 3.4: Beurteilung der Stabilität anhand der Wurzellagen

Die BIBO-Stabilität eines linearen, zeitinvarianten Übertragungssystems kann ebenfalls mit Hilfe der Gewichtsfunktion überprüft werden. Bei einer gegebenen Gewichtsfunktion ergibt sich die Ausgangsgröße für beliebige Eingangsgrößen zu (vgl. Abschnitt 2.4):

$$y(t) = g(t) * u(t) = \int_0^t g(t - \tau) u(\tau) d\tau . \quad (3.27)$$

Für ein beschränktes Eingangssignal $|u(t)| \leq u_{\max} < \infty$ erhält man daraus die Beziehung

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_0^t g(\tau) u(t - \tau) d\tau \right| \\ &\leq \int_0^t |g(\tau)| |u(t - \tau)| d\tau \end{aligned}$$

$$\leq |u_{\max}| \int_0^t |g(\tau)| d\tau \leq M.$$

Daraus folgt, daß das System genau dann BIBO–stabil ist, wenn das Integral

$$\int_0^t |g(\tau)| d\tau$$

für alle t existiert, also

$$\int_0^{\infty} |g(t)| dt < \infty \tag{3.28}$$

gilt.

Eine Überprüfung der BIBO–Stabilität anhand der Übertragungsfunktion ist auch möglich, da folgender Zusammenhang gilt:

Satz 3.1

Ein lineares, zeitinvariantes Übertragungssystem ist genau dann BIBO–stabil, wenn es auch asymptotisch stabil ist.

3.4 Algebraische Stabilitätskriterien

Für die Beantwortung der Frage, ob ein dynamisches System stabil ist oder nicht, sind die genauen Werte der Wurzeln der charakteristischen Gleichung gar nicht von Interesse. Vielmehr muß nur überprüft werden, ob alle Wurzeln negative Realteile haben. Hierfür gibt es einfache Kriterien, sogenannte *Stabilitätskriterien*, mit denen dies leicht überprüft werden kann.

3.4.1 Das Hurwitz–Kriterium

Die im folgenden angegebenen Kriterien ermöglichen es zu entscheiden, ob sämtliche Nullstellen eines Polynoms

$$P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = a_n (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n) \tag{3.29}$$

negative Realteile haben, ohne daß die Nullstellen im einzelnen berechnet werden müssen.

Das Polynom (3.29) wird *Hurwitz–Polynom* genannt, wenn alle Wurzeln $p_i, i = 1, 2, \dots, n$ negativen Realteil haben. Ein lineares System ist also gemäß den zuvor eingeführten Stabilitätsbedingungen genau dann asymptotisch stabil, wenn sein charakteristisches Polynom ein Hurwitz–Polynom ist.

Satz 3.2 (Hurwitz–Kriterium)

Sämtliche Nullstellen des Polynoms (3.29) haben genau dann negative Realteile, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Alle a_i sind vorhanden und besitzen gleiches Vorzeichen (notwendige Bedingung).
2. Die Hurwitzdeterminante H_{n-1} und alle ihre Hauptdeterminanten $H_i (i = 1, 2, \dots, n-2)$ sind positiv (1. und 2. notwendig und hinreichend).

$$H_{n-1} = \begin{array}{cccc|cccc}
 & H_1 & H_2 & H_3 & & & & \\
 & \begin{array}{|c|} \hline a_{n-1} \\ \hline \end{array} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
 & a_n & \begin{array}{|c|} \hline a_{n-2} \\ \hline \end{array} & a_{n-4} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
 & 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & \cdots & \vdots \\
 & 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & \cdots & \vdots \\
 \hline
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_1 & 0 \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_2 & a_0 \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_5 & a_3 & a_1
 \end{array} \quad (3.30)$$

mit $a_{n-i} = 0$ für $n - i < 0$; $i = 0, 1, 2, \dots$

□

3.4.2 Das Routh–Kriterium

Während das Hurwitz–Kriterium nur eine Ja/Nein–Entscheidung bezüglich der Stabilität eines linearen Systems erlaubt, kann mittels des Routh–Kriteriums auch eine Aussage über die Zahl der instabilen Eigenwerte gemacht werden:

Satz 3.3 (Routh–Kriterium)

Sämtliche Nullstellen des Polynoms (3.29) haben genau dann negative Realteile, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Alle a_i sind vorhanden und besitzen das gleiche Vorzeichen (notwendige Bedingung).
2. Alle Elemente der ersten Spalte des Routh–Schemas (s. unten), die Routh–Probekoeffizienten sind positiv (notwendige und hinreichende Bedingung).

Die Zahl der Vorzeichenwechsel der Routh–Probekoeffizienten ist gleich der Zahl der Wurzeln mit positivem Realteil.

□

Routh–Schema

a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	...
a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...
$A_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$	$B_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$	$C_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$...
$A_2 = \frac{A_1 a_{n-3} - a_{n-1} B_1}{A_1}$	$B_2 = \frac{A_1 a_{n-5} - a_{n-1} C_1}{A_1}$	$C_2 = \frac{A_1 a_{n-7} - a_{n-1} D_1}{A_1}$...
$A_3 = \frac{A_2 B_1 - A_1 B_2}{A_2}$	$B_3 = \frac{A_2 C_1 - A_1 C_2}{A_2}$
$A_4 = \frac{A_3 B_2 - A_2 B_3}{A_3}$

Beispiele zum Routh–Kriterium

a) $2s^6 + 9s^5 + 20s^4 + 28s^3 + 24s^2 + 11s + 2 = 0$

2	20	24	2
9	28	11	0
13,778	21,556	2	0
13,919	9,694	0	0
11,960	2	0	
7,366	0		
2			

Alle Elemente der 1. Spalte des Routh–Schemas positiv: \implies Nur Wurzeln mit negativem Realteil.

b) $s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$

1	3	5
2	4	0
1	5	0
-6	0	
5		

2 Vorzeichenwechsel: \implies 2 Wurzeln mit positivem Realteil.

3.5 Stabilitätsprüfung anhand der charakteristischen Gleichung des geschlossenen Regelkreises

Im folgenden wird die Stabilität des in Bild 3.1 dargestellten Standardregelkreises untersucht. Das Übertragungsverhalten dieses Kreises wird für $n = 0$ durch die Führungsüber-

tragungsfunktion $G_w(s)$ und die Störübertragungsfunktion $G_z(s)$ beschrieben:

$$Y(s) = G_w(s)W(s) + G_z(s)Z(s) . \quad (3.31)$$

Dabei gilt entsprechend Gln. (3.5) und (3.7)

$$G_w(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} \quad (3.32)$$

$$G_z(s) = \frac{1}{1 + G_0(s)} \quad (3.33)$$

mit $G_0(s)$ der Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises. Wenn $G_0(s)$ eine gebrochen rationale Funktion dieser Form ist

$$G_0(s) = \frac{Z_0(s)}{N_0(s)} , \quad (3.34)$$

dann sind auch $G_w(s)$ und $G_z(s)$ gebrochen rationale Funktionen:

$$\left. \begin{aligned} G_w(s) &= \frac{Z_w(s)}{N_w(s)} = \frac{Z_0(s)}{N_0(s) + Z_0(s)} \\ G_z(s) &= \frac{Z_z(s)}{N_z(s)} = \frac{N_0(s)}{N_0(s) + Z_0(s)} \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

Die Nennerpolynome $N_z(s)$ und $N_w(s)$ sind gleich und bestimmen die **Eigenbewegung des geschlossenen Systems**. Das Polynom

$$C(s) = N_w(s) = N_z(s) = Z_0(s) + N_0(s) = 0 . \quad (3.36)$$

stellt daher das charakteristische Polynom des geschlossenen Kreises dar. Die Nullstellen dieses Polynoms sind die Polstellen von $G_w(s)$ bzw. $G_z(s)$. Die mit Hilfe des Nenners von $G_w(s)$ bzw. $G_z(s)$ (vgl. Gl. (3.32) bzw. (3.33)) gebildete Beziehung

$$1 + G_0(s) = 0 \quad (3.37)$$

wird daher auch als *charakteristische Gleichung des Regelkreises* bezeichnet.

Da für ein stabiles Systemverhalten alle Pole der Übertragungsfunktion negative Realteile haben müssen, besteht eine wesentliche Aufgabe der Regelungstechnik darin, die Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

- A) bei der Analyse zu bestimmen,
- B) bei der Regelkreissynthese in die linke s -Halbebene zu legen.

Zunächst gelten auch für das charakteristische Polynom (3.36) alle bisher behandelten algebraischen Stabilitätskriterien: z. B. Hurwitz, Routh. Im folgenden interessiert aber nicht nur die absolute Stabilität, d.h. die ja/nein-Entscheidung über Stabilität. Für die praktische Anwendung muß immer eine gewisse Stabilitätsreserve zur impliziten Berücksichtigung von Parameterungenauigkeiten der die Systeme beschreibenden mathematischen Modelle (Bild 3.5) vorgesehen werden.

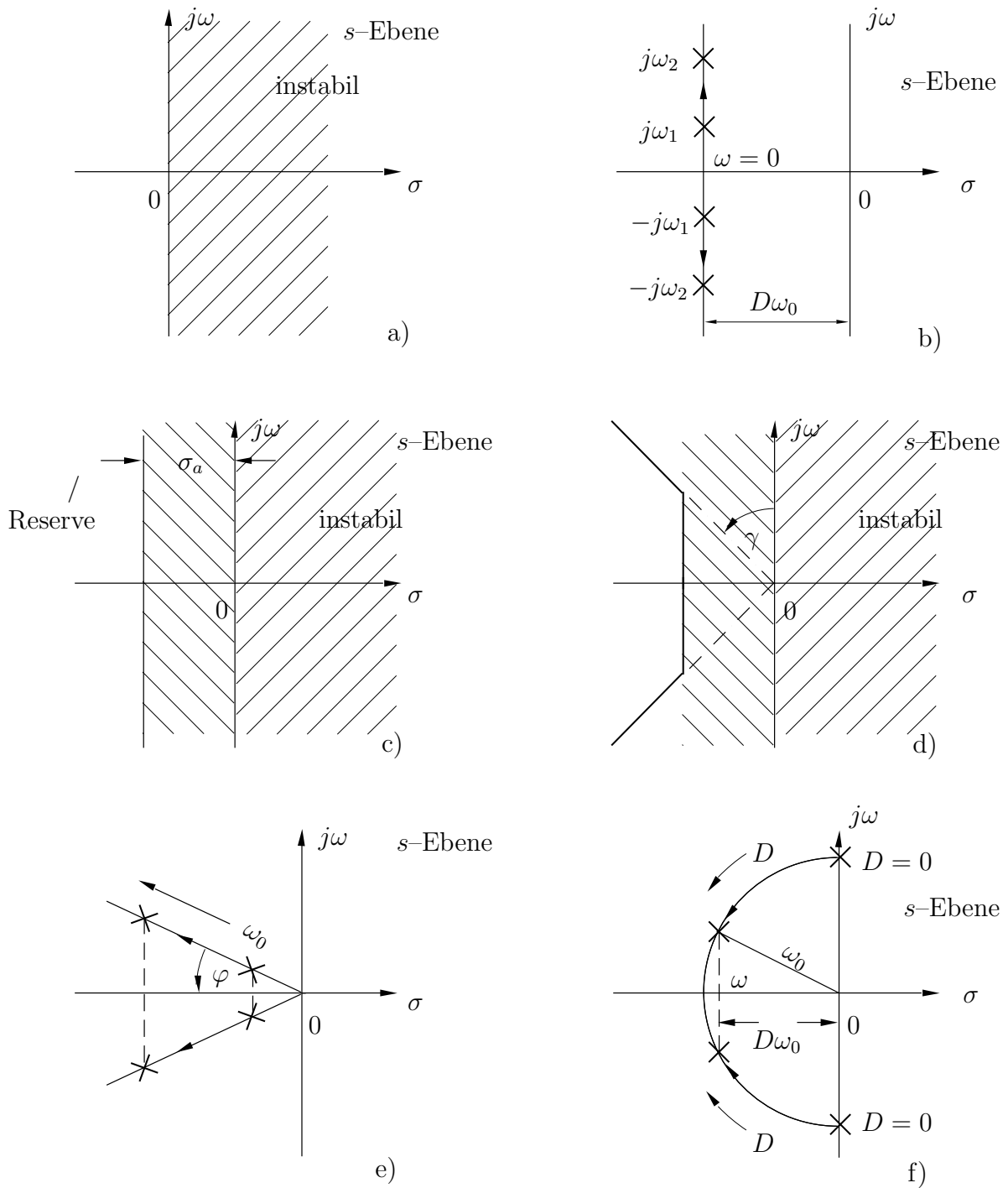


Bild 3.5: Zur Stabilitätsreserve: a) Stabilitätsgebiet b) mögliche Lage stabiler Eigenwerte c) absolute Stabilitätsreserve d) relative Stabilitätsreserve e) Eigenwerte konstanten Dämpfungsgrades f) Eigenwerte mit konstantem ω_0

4 Entwurf linearer Regelkreise

4.1 Einleitung

Eine der wichtigsten Aufgaben für den Regelungstechniker stellt der Entwurf oder die Synthese eines Regelkreises dar, wobei für eine vorgegebene Regelstrecke ein geeigneter Regler zu entwerfen ist, der die an den Regelkreis gestellten Anforderungen möglichst gut oder bei geringstem technischen Aufwand erfüllt.

Der Entwurf eines linearen Regelkreises kann sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich erfolgen. Unabhängig vom gewählten Entwurfsverfahren fallen bei der Lösung einer Regelungsaufgabe folgende Teilaufgaben an:

Lösung einer Regelungsaufgabe

1. Aufstellung eines linearen Modells der Regelstrecke.
2. Analyse des dynamischen Verhaltens (Stabilität, Dämpfung, Minimalphasigkeit, Steuer- und Beobachtbarkeit ...).
3. Anpassung der Güteforderungen an das jeweilige Entwurfsverfahren.
4. Wahl der Regelkreisstruktur.
5. Wahl des Reglers
6. Festlegung der Reglerparameter.
7. Simulation des Verhaltens des geschlossenen Regelkreises.
8. Bewertung der Regelgüte anhand der Güteanforderungen.

Für den Reglerentwurf ist typisch, daß einige dieser Teilaufgaben im allgemeinen mehrfach zu lösen sind. Die Entwurfsaufgabe kann nicht so gestellt werden, daß sie eine eindeutige Lösung besitzt und in einem Schritt berechnet werden kann.

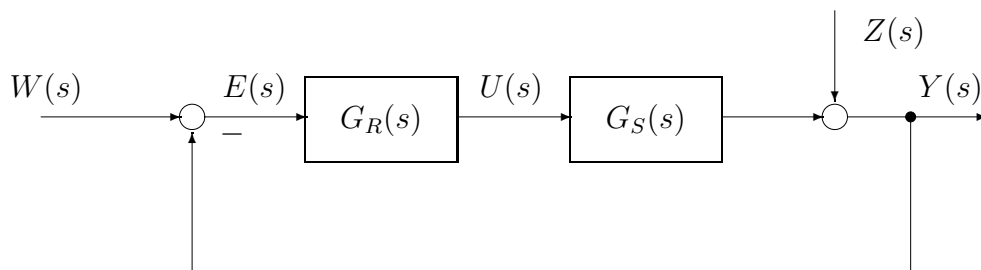


Bild 4.1: Standardregelkreis

An den im Bild 4.1 dargestellten Standardregelkreis werden üblicherweise die folgenden Anforderungen gestellt:

1. Als Mindestanforderung muß der Regelkreis stabil sein.
2. Die Störgrößen $z(t)$ sollen einen möglichst geringen Einfluß auf die Regelgröße $y(t)$ haben.
3. Die Regelgröße $y(t)$ soll einer zeitlich sich verändernden Führungsgröße $w(t)$ möglichst genau und schnell folgen.
4. Der Regelkreis soll möglichst unempfindlich gegenüber kleinen Parameteränderungen sein.

Um die ersten beiden Anforderungen zu erfüllen, müßte im Idealfall für die Führungsübertragungsfunktion (entsprechend der Forderung 3)

$$G_W(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = 1 \quad (4.1)$$

und für die Störübertragungsfunktion (entsprechend der Forderung 2)

$$G_Z(s) = \frac{Y(s)}{Z(s)} = \frac{1}{1 + G_0(s)} = 0 \quad (4.2)$$

gelten. Die im Punkt 4 geforderte Parameterunempfindlichkeit kann man mathematisch wie folgt formulieren: Infolge einer Parameterabweichung sei eine Abweichung ΔG_0 von der Nominalgröße G_0^* entstanden. Diese hat dann die Abweichung ΔG_W von G_W^* zur Folge. Mit

$$\Delta G_0 = G_0 - G_0^*$$

und

$$\Delta G_W = G_W - G_W^*$$

erhält man aus 4.1

$$\Delta G_W = \frac{\Delta G_0}{(1 + G_0)(1 + G_0^*)} \quad (4.3)$$

wobei möglichst

$$\Delta G_W = 0 \quad (4.4)$$

gelten soll.

Man erkennt aus (4.1 - 4.4), daß zwar grundsätzlich alle Forderungen mit einem sehr großen G_0 näherungsweise erfüllt werden könnten. Hierzu sind allerdings große Reglerverstärkungen notwendig, die aus den folgenden Gründen in der Praxis nicht realisiert werden können:

1. Dynamisches Verhalten des Stellgliedes (Stellgrößenbeschränkung),
2. Zu große Belastung der Regelstrecke,
3. Verstärkung des Schwingungsverhaltens oder sogar Verlust der Stabilität.

4.2 Gütemaße im Zeitbereich

Bei der Beurteilung der Güte einer Regelung erweist es sich als zweckmäßig, den zeitlichen Verlauf der Regelgröße $y(t)$ bzw. der Regelabweichung $e(t)$ unter Einwirkung wohldefinierter Testsignale zu betrachten. Als wichtigstes Testsignal wird eine sprungförmige Eingangsgröße verwendet. Im Bild 4.2 ist die typische Antwort eines Regelkreises auf eine sprungförmige Änderung der Führungsgröße dargestellt.

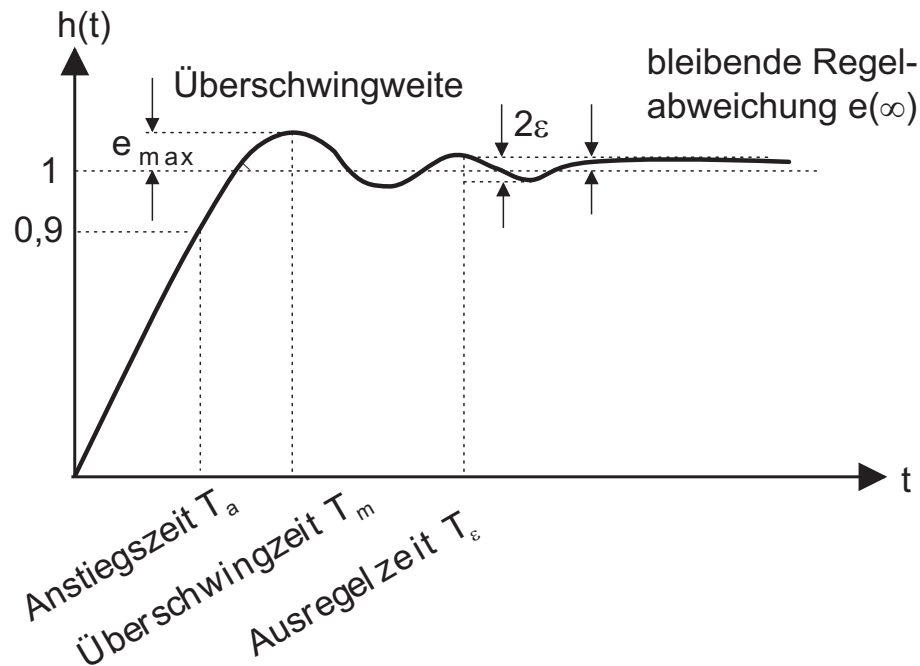


Bild 4.2: Antwort eines Regelkreises auf eine sprungförmige Änderung der Führungsgröße

Zur näheren Beschreibung des zeitlichen Übergangsverhaltens werden die folgenden Begriffe eingeführt:

- Die **maximale Überschwingweite** e_{max} gibt den Betrag der maximalen Regelabweichung an, die nach erstmaligem Erreichen des Sollwertes 1 auftritt.
- Die Zeit T_m entspricht dem Zeitpunkt des Auftretens der maximalen Überschwingweite.
- Die **Anstiegszeit** T_a ist die Zeit bis zum Erreichen von 90% des statischen Endwertes.
- Die **Ausregelzeit** T_ϵ ist der Zeitpunkt, ab dem der Betrag der Regelabweichung kleiner als eine vorgeschriebene Schranke ϵ ist.

- Als **Anregelzeit** T_{an} bezeichnet man den Zeitpunkt, bei dem erstmalig der Sollwert erreicht wird.

In ähnlicher Weise lässt sich auch das Störverhalten charakterisieren. Eine typische Antwort auf eine sprungförmige Störung zeigt Bild 4.3.

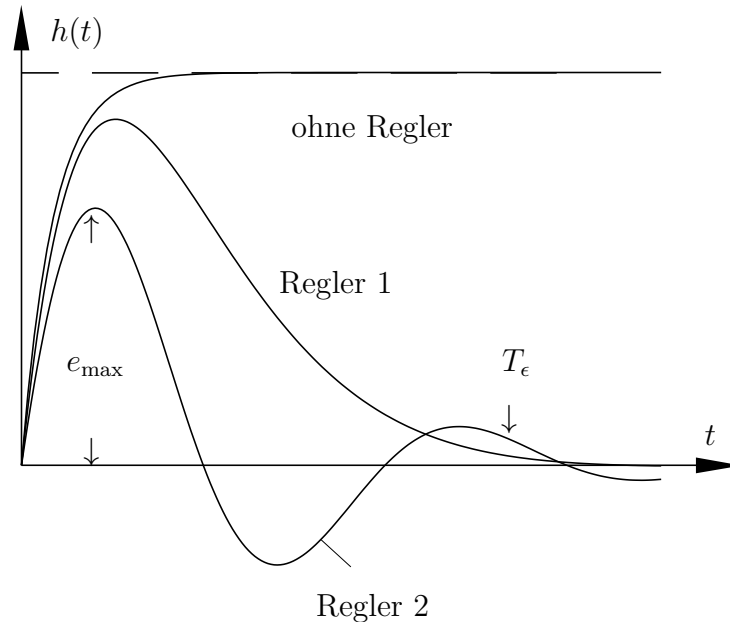


Bild 4.3: Störsprungantworten eines Systems für verschiedene Regler

Die eingeführten Größen e_{max} und T_ϵ kennzeichnen die Dämpfung. Die Zeiten T_{an} , T_a und T_m geben Auskunft über die Schnelligkeit des Systems. Dämpfung und Schnelligkeit zusammengenommen nennt man die Dynamik des Regelverhaltens. Die bleibende Regelabweichung e_∞ charakterisiert das statische Verhalten. Das Ziel des Reglerentwurfs ist die Minimierung der eingeführten Größen, im wesentlichen der Werte von T_{an} , T_ϵ und e_{max} , wobei die maximal zulässige Stellgröße eine Nebenbedingung ist.

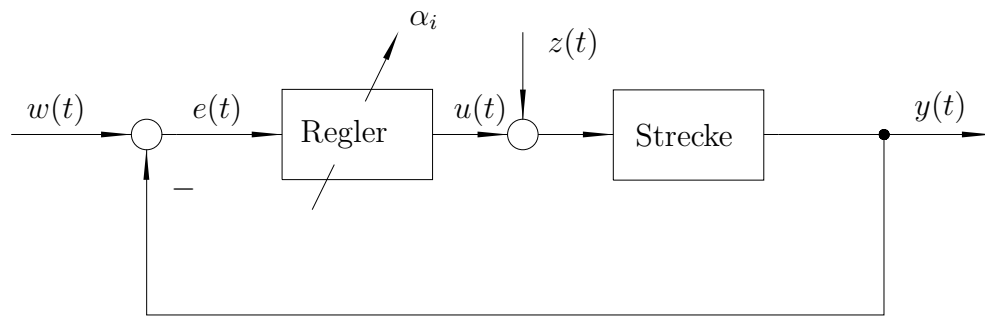
4.3 Integralkriterien

Um Reglereinstellungen vergleichbar und vor allem auch analytisch vorausrechenbar zu machen, ist es sinnvoll ein geeignetes Bewertungskriterium (eine Kosten- oder Gütefunktion) einzuführen. Im Bild 4.4 ist ein Regelkreis mit den frei einstellbaren Parametern eines Reglers dargestellt.

Es werden nun Bewertungsfunktionen der Form

$$I(\alpha_i, e(t)) = \min_{(\alpha_i)} \quad (4.5)$$

eingeführt, die für einen gegebenen Regelkreis vor allem von der Wahl der Reglerparameter und der auf das System einwirkenden Signale abhängen. Die Reglerparameter müssen

**Bild 4.4:** Standardregelkreis

dann so gewählt werden, daß diese Bewertungsfunktion einen Extremwert – im allgemeinen ein Minimum – annimmt. Eine Auswahl häufig benutzter Integralkriterien ist in der Tabelle 4.1 zusammengestellt.

Die Parameteroptimierung kann entweder experimentell an der installierten Anlage oder durch Simulation im Labor oder auch analytisch in Form der Lösung einer Extremalaufgabe erfolgen. Das letztere ist normalerweise nur für das Kriterium I_3 , der quadratischen Regelfläche, mit vertretbarem Aufwand durchzuführen. In den letzten Jahren wird bei der Auslegung optimierter Regler aber vorzugsweise die Darstellung des Regelungsproblems mittels Zustandsmodellen herangezogen.

Gütemaß	Eigenschaft
$I_1 = \int_0^{\infty} e(t) dt$	<i>Lineare Regelfläche:</i> Eignet sich zur Beurteilung stark gedämpfter oder monotoner Regelverläufe; einfache mathematische Behandlung.
$I_2 = \int_0^{\infty} e(t) dt$	<i>Betragslineare Regelfläche:</i> Geeignet für nichtmonotonen Schwingungsverlauf. Umständliche Auswertung.
$I_3 = \int_0^{\infty} e^2(t) dt$	<i>Quadratische Regelfläche:</i> Starke Berücksichtigung großer Regelabweichungen; liefert größere Ausregelzeiten als I_2 . In vielen Fällen analytische Berechnung möglich.
$I_4 = \int_0^{\infty} t e(t) dt$	<i>Zeitbeschwerte betragslineare Regelfläche (Integral of time-multiplied absolute value of error, ITAE-Kriterium):</i> Wirkung wie I_2 ; berücksichtigt aber zusätzlich die Dauer der Regelabweichung.
$I_5 = \int_0^{\infty} te^2(t) dt$	<i>Zeitbeschwerte quadratische Regelfläche:</i> Wirkung wie I_3 ; berücksichtigt zusätzlich die Dauer der Regelabweichung.
$I_6 = \int_0^{\infty} [e^2(t) + \alpha e^2(t)] dt$	<i>Verallgemeinerte quadratische Regelfläche:</i> Wirkung günstiger als bei I_3 , allerdings Wahl des Bewertungsfaktors α subjektiv.
$I_7 = \int_0^{\infty} [e^2(t) + \beta u^2(t)] dt$	<i>Quadratische Regelfläche und Stellaufwand:</i> Etwas größerer Wert von e_{max} , jedoch t_e wesentlich kürzer; Wahl des Bewertungsfaktors β subjektiv.

Anmerkung: Besitzt der betrachtete Regelkreis eine bleibende Regelabweichung e_{∞} , dann ist $e(t)$ durch $e(t) - e_{\infty}$ zu ersetzen, da sonst die Integrale in der obigen Form nicht konvergieren. Entsprechendes gilt auch für die Stellgröße $u(t)$.

Tabelle 4.1: Die wichtigsten Gütemaße für Integralkriterien

4.4 Einstellung eines PID-Reglers nach Ziegler-Nichols

Die meisten industriellen Regelungsaufgaben werden auch heute noch mit Hilfe eines linearen PID-Reglers gelöst. Das Übertragungsverhalten dieses Standardreglers läßt sich auf die drei linearen idealisierten Grundformen des P-, I- und D-Gliedes zurückführen.

PID-Regler: Der PID-Regler setzt sich aus den folgenden Bausteinen zusammen:

P-Anteil mit der Übertragungsfunktion K_R

I-Anteil mit der Übertragungsfunktion $\frac{K_I}{s}$

D-Anteil mit der Übertragungsfunktion $K_D s$

Die Parallelschaltung dieser drei Komponenten ergibt:

$$G_R(s) = K_R + \frac{K_I}{s} + K_D s \quad (4.6)$$

Nach Einführung der Größen

$$T_I = \frac{K_R}{K_I} \quad \text{Nachstellzeit}$$

$$T_D = \frac{K_D}{K_R} \quad \text{Vorhaltezeit}$$

läßt sich Gl. (4.6) wie folgt schreiben, (Bild 4.5):

$$G_R(s) = K_R \left(1 + \frac{1}{sT_I} + sT_D \right) \quad (4.7)$$

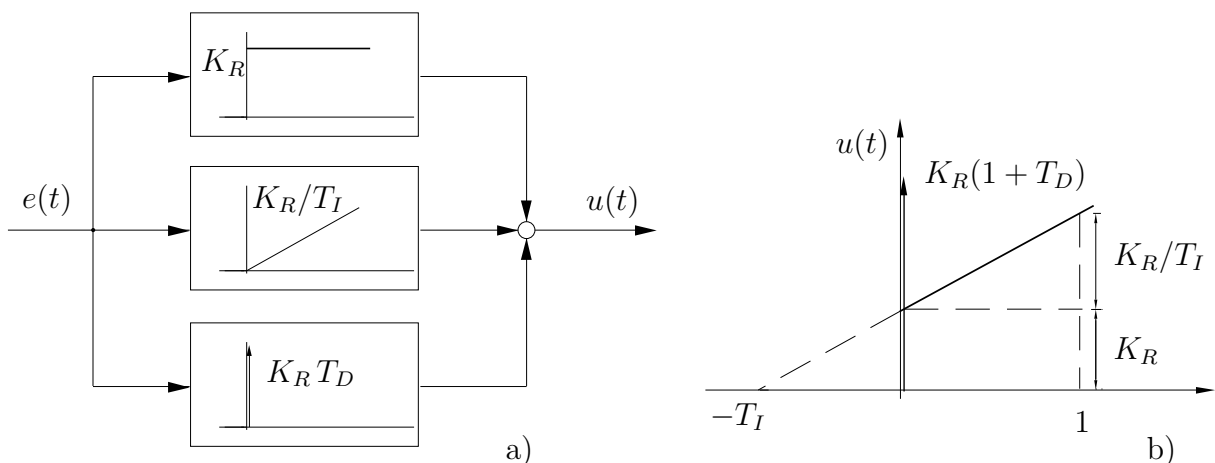


Bild 4.5: PID-Regler ohne Verzögerung: a) Blockschaltbild b) Sprungantwort

Die drei Größen K_R , T_I und T_D lassen sich gewöhnlich in gewissen Bereichen einstellen und werden daher auch als *Einstellwerte* des Reglers bezeichnet.

Aus Gl. (4.7) folgt durch inverse Laplacetransformation der zeitliche Zusammenhang zwischen der Regelabweichung $e(t)$ und Reglerausgangsgröße $u_R(t)$:

$$u_R(t) = K_R e(t) + \frac{K_R}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + K_R T_D \frac{de(t)}{dt} . \quad (4.8)$$

Das technisch nicht realisierbare ideale D–Verhalten wird in realen Reglern durch ein DT₁–Glied mit der Übertragungsfunktion

$$G_D(s) = K_R \frac{T_D s}{1 + T s} \quad (4.9)$$

approximiert, wobei die Zeitkonstante T sehr klein gewählt wird. Für $T \ll T_D$ hat das zusätzliche Verzögerungsglied praktisch keinen Einfluß.

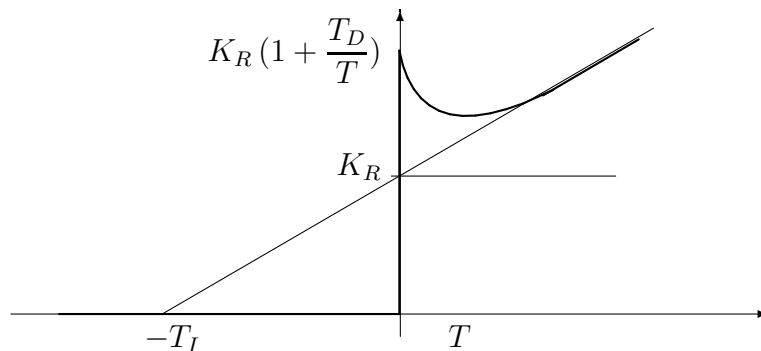


Bild 4.6: Übergangsfunktion des PID–Reglers mit Verzögerung 1. Ordnung

Von Ziegler und Nichols empirisch gefundene Einstellungsregeln haben für die Praxis immer noch eine große Bedeutung. Die aus einer Vielzahl von Regelkreisuntersuchungen gefundenen Regeln führen auch bei unterschiedlichen Regelkreisen zu brauchbaren Einstellungen eines PID–Reglers. Es werden hier zwei Verfahren unterschieden:

- a) Methode des Stabilitätsrandes (I)
- b) Methode der Übergangsfunktion (II)

Methode des Stabilitätsrandes

Voraussetzung: Die Regelstrecke ist stabil und kann zeitweise im grenzstabilen Bereich betrieben werden.

1. Der Regelkreis wird mit Hilfe eines P–Reglers geschlossen.
2. Die Reglerverstärkung wird solange erhöht, bis der geschlossene Kreis Dauerschwingungen ausführt. Die dabei eingestellte Reglerverstärkung wird als K_{Rkrit} bezeichnet.

	Reglertypen	Reglereinstellwerte		
		K_R	T_I	T_D
Methode I	P	$0,5 K_{Rkrit}$	-	-
	PI	$0,45 K_{Rkrit}$	$0,85 T_{krit}$	-
	PID	$0,6 K_{Rkrit}$	$0,5 T_{krit}$	$0,12 T_{krit}$
Methode II	P	$\frac{1}{K_S} \frac{T}{T_u}$	-	-
	PI	$\frac{0,9}{K_S} \frac{T}{T_u}$	$3,33 T_u$	-
	PID	$\frac{1,2}{K_S} \frac{T}{T_u}$	$2 T_u$	$0,5 T_u$

Tabelle 4.2: Reglereinstellwerte nach Ziegler und Nichols

3. Anhand der Verstärkung K_{Rkrit} und der Periodendauer T_{krit} der Dauerschwingung (Bild 4.7) werden die Reglerparameter mit Hilfe der Tabelle 4.2 festgelegt.

Ergebnis: Reglerparameter für P-, PI- und PID-Regler.

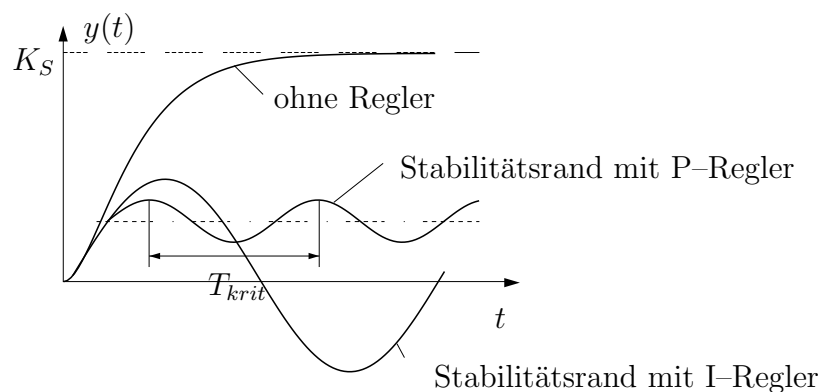


Bild 4.7: Auswertung des Stabilitätsrandes für die Einstellregeln nach Ziegler-Nichols

Ist tatsächlich ein PI-Regler oder ein PID-Regler eingesetzt, müssen der I-Anteil und der D-Anteil möglichst unwirksam gemacht werden, d.h.

- T_I so groß wie möglich und
- T_D so klein wie möglich.

Die so gefundenen Einstellungen ergeben immer ein stabiles Regelungsverhalten, das zu-
meist nur noch einer geringen Nachjustierung bedarf.

Methode der Übergangsfunktion

Voraussetzung: Die Regelstrecke ist stabil und weist näherungsweise aperiodisches Über-
gangsverhalten auf.

1. Durch Experimente mit der Regelstrecke wird die Übergangsfunktion bestimmt.
2. Die Übergangsfunktion wird durch die Reihenschaltung eines PT_1 -Gliedes und eines Totzeitgliedes approximiert (vgl. Bild 4.8), indem die statische Verstärkung K_S , die Verzugszeit T_u und die Zeitkonstante T bestimmt werden.
3. Die Reglerparameter werden mit Hilfe der Tabelle 4.2 festgelegt.

Ergebnis: Reglerparameter für P-, PI- und PID-Regler.

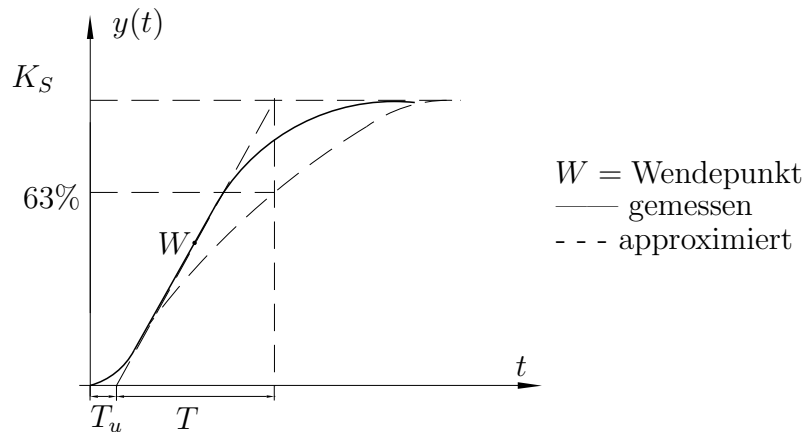


Bild 4.8: Approximation eines Systems höherer Ordnung durch ein System 1. Ordnung mit Totzeit

A Mathematische Grundlagen

A.1 Komplexe Zahlen und Funktionen

In der Steuer- und Regelungstechnik wird zur Beschreibung von Signalen und Systemen von komplexen Zahlen und Funktionen intensiv Gebrauch gemacht. Komplexe Zahlen ermöglichen beispielsweise eine kompakte und elegante Darstellung von Phase und Amplitude eines sinusförmigen Signals.

Da es keine reelle Zahl x gibt, die der Gleichung

$$x^2 = -1 \quad (\text{A.1})$$

genügt, führte der italienische Mathematiker Raffaell Bombiello Mitte des 16. Jahrhunderts ein Symbol $\sqrt{-1}$ ein. Euler (1707–1783) verwendete für diese sogenannte *imaginäre Einheit* das Formelzeichen i , das in dieser Form in der Mathematik und Physik bis heute verwendet wird. In den Ingenieurwissenschaften hat sich das Formelzeichen j für die imaginäre Einheit durchgesetzt, die jetzt die folgende Gleichung erfüllt:

$$j^2 = -1. \quad (\text{A.2})$$

Darstellung in kartesischen Koordinaten:

Unter einer *komplexen Zahl* (lat.: zusammengesetzt) versteht man ein Symbol der Form

$$x = x_R + jx_I = \operatorname{Re}(x) + j \operatorname{Im}(x), \quad (\text{A.3})$$

wobei x_R und x_I reelle Zahlen sind. Reelle Zahlen entsprechen dem Spezialfall $x_I = 0$. Komplexe Zahlen können als Punkte in einer Ebene dargestellt werden, der sogenannten *komplexen Ebene* oder auch *Gaußschen Zahlenebene* (Bild A.1).

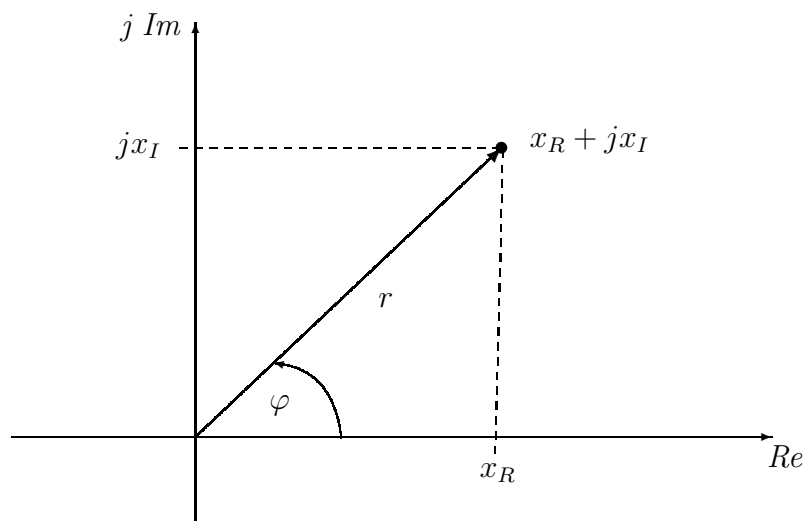


Bild A.1: Geometrische Interpretation einer komplexen Zahl als Zeiger in der Gaußschen Zahlenebene.

Geometrisch kann dieser Punkt in der komplexen Ebene auch durch einen Vektor beschrieben werden, den man als *Zeiger* bezeichnet. Die Form (A.3) nennt man auch Darstellung einer komplexen Zahl nach *Real- und Imaginärteil*.

Real- und Imaginärteil lassen sich über die Beziehungen

$$\operatorname{Re}(x) = x_R = \frac{1}{2}(x + x^*) \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{Im}(x) = x_I = \frac{1}{2j}(x - x^*) \quad (\text{A.4})$$

berechnen, wobei x^* die *konjugiert komplexe* Zahl bezeichnet.

Darstellung in Polarkoordinaten:

Der Zeiger x in Bild (A.3) wird durch die *Polardarstellung*

$$x = r \cdot e^{j\varphi} = |x| \cdot e^{j\angle x} \quad (\text{A.5})$$

beschrieben. Man nennt diese Darstellung auch Darstellung nach *Betrag und Phase*.

Der **Betrag** einer komplexen Zahl berechnet sich zu

$$r = |x| = \sqrt{x \cdot x^*} = \sqrt{\operatorname{Re}(x)^2 + \operatorname{Im}(x)^2} \quad (\text{A.6})$$

und die **Phase** (Winkel, Argument) zu

$$\varphi = \angle x = \arg x = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(x)}{\operatorname{Re}(x)}\right) & \text{für } \operatorname{Re}(x) > 0 \quad \in (0 ; \pi] \\ \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(x)}{\operatorname{Re}(x)}\right) \pm \pi & \text{für } \operatorname{Re}(x) < 0 \quad \in (-\pi ; 0) \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

Umrechnung in kartesische Koordinaten:

$$\operatorname{Re}(x) = x_R = |x| \cdot \cos(\varphi) \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{Im}(x) = x_I = |x| \cdot \sin(\varphi) \quad (\text{A.8})$$

Konjugiert komplexe Zahl:

$$x^* = x_R - j x_I = |x| \cdot e^{-j\angle x} \quad (\text{A.9})$$

$$(x \pm y)^* = x^* \pm y^* \quad (x \cdot y)^* = x^* \cdot y^* \quad \left(\frac{x}{y}\right)^* = \frac{x^*}{y^*} \quad (\text{A.10})$$

Addition und Subtraktion:

$$x \pm y = (x_R \pm y_R) + j(x_I \pm y_I) \quad (\text{A.11})$$

Multiplikation und Division:

$$x \cdot y = |x| \cdot |y| \cdot e^{j(\angle x + \angle y)} \quad \frac{x}{y} = \frac{|x|}{|y|} \cdot e^{j(\angle x - \angle y)} \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{aligned} z = x \cdot y &= (x_R + j x_I) \cdot (y_R + j y_I) \\ &= (x_R y_R - x_I y_I) + j (x_I y_R + x_R y_I) = z_R + j z_I \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Potenzen und Wurzeln:

$$x^n = |x|^n \cdot e^{jn\angle x} \quad (\text{A.14})$$

Die N -te Wurzel liefert N verschiedene Lösungen

$$\sqrt[N]{x} = \sqrt[N]{|x|} \cdot e^{j\frac{\angle x + 2\pi n}{N}}, \quad n = 0, \dots, N - 1 \quad (\text{A.15})$$

Die N -te Wurzel aus 1 ergibt sich damit zu

$$\sqrt[N]{1} = e^{j2\pi\frac{n}{N}} = (W_N)^n \quad \text{mit} \quad W_N = e^{j\frac{2\pi}{N}}, \quad (\text{A.16})$$

wobei man W_N als komplexen Drehfaktor bezeichnet.

Logarithmus:

$$\ln x = \ln(|x| \cdot e^{j\angle x}) = \ln|x| + j\angle x \quad (\text{A.17})$$

$$\ln \frac{x}{x^*} = \ln x - \ln x^* = j 2\angle x \quad (\text{A.18})$$

$$\ln \frac{1 + jx}{1 - jx} = j 2 \arctan(x) \quad \left(\ln \frac{1 + x}{1 - x} = 2 \operatorname{artanh}(x) \right) \quad (\text{A.19})$$

Eulersche Gleichung:

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \sin(\varphi) \quad (\text{A.20})$$

Von dieser Euler-Beziehung wird in der Regelungstechnik häufig Gebrauch gemacht, da mit dieser Beziehung Sinus- bzw. Cosinusfunktionen als Differenzen bzw. Summen von Exponentialfunktionen dargestellt werden können:

$$\sin(\varphi) = \frac{1}{2j} (e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}), \quad (\text{A.21})$$

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{2} (e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}). \quad (\text{A.22})$$

Alle genannten Darstellungsformen und Regeln gelten jeweils auch für komplexe Funktionen $x(t)$ oder Folgen $x[k]$.

A.2 Polynome und rationale Funktionen

Eine Funktion f mit

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a_i \in \mathbb{C}, \quad a_n \neq 0 \quad (\text{A.23})$$

heißt **Polynom n -ten Grades** oder *ganze rationale Funktion*.

Die Zahl $x_0 \in \mathbb{C}$ heißt **Nullstelle** oder *Wurzel* des Polynoms, wenn $f(x_0) = 0$ gilt. Lässt sich das Polynom in der Form $f(x) = (x - x_0)^k \cdot \tilde{f}(x)$ darstellen, wobei das Polynom $\tilde{f}(x)$ keine Nullstelle bei x_0 besitzt, handelt es sich bei x_0 um eine *Nullstelle k -ter Ordnung*. Man sagt dazu auch Nullstelle mit der **Vielfachheit k** .

Nach dem **Fundamentalsatz der Algebra** besitzt ein Polynom n -ten Grades genau n Nullstellen $\alpha_i \in \mathbb{C}$ und lässt sich daher in der *Produktform* zu

$$f(x) = a_n \cdot (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n) = a_n \cdot \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i) \quad (\text{A.24})$$

darstellen.¹ Polynome mit *reellen* Koeffizienten enthalten stets nur *reelle Nullstellen* oder *konjugiert komplexe Nullstellenpaare*, d.h. wenn $\alpha \in \mathbb{C}$ komplexe Nullstelle von $f(x)$ ist, so gilt dies auch für α^* . Man kann die konjugiert komplexen Nullstellenpaare auch zu reellen Polynomen zweiten Grades zusammenfassen:

$$(x - \alpha)(x - \alpha^*) = x^2 + px + q, \quad p, q \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.25})$$

Den Quotient zweier Polynome bezeichnet man als *gebrochen rationale* oder **rationale Funktion**:

$$F(x) = \frac{b(x)}{a(x)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i x^i}{\sum_{i=0}^n a_i x^i} = \frac{b_0 + b_1x + \dots + b_m x^m}{a_0 + a_1x + \dots + a_n x^n}, \quad a_n, \quad b_m \neq 0. \quad (\text{A.26})$$

Ist der Grad des Zählerpolynoms kleiner als der Grad des Nennerpolynoms ($m < n$), heißt $F(x)$ **echt gebrochen rationale Funktion**, ansonsten ($m \geq n$) *unecht gebrochen rationale Funktion*. Mit Hilfe der **Polynomdivision** lässt sich jede unecht gebrochen rationale Funktion als Summe eines Polynoms (*ganzzrationaler Anteil*) und einer echt gebrochen rationalen Funktion darstellen:

$$F(x) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i x^i}{\sum_{i=0}^n a_i x^i} = \sum_{i=0}^{m-n} g_i x^i + \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \tilde{b}_i x^i}{\sum_{i=0}^n a_i x^i}, \quad m \geq n. \quad (\text{A.27})$$

¹ Zur Umwandlung der Polynomform (A.23) in die Produktform (A.24) sind daher zunächst die Nullstellen α_i des Polynoms zu bestimmen

Die rationale Funktion $F(x)$ besitzt in x_0 eine **Nullstelle**, wenn $b(x_0) = 0$ und $a(x_0) \neq 0$ gilt, d.h. das Zählerpolynom eine Nullstelle, das Nennerpolynom aber keine Nullstelle bei x_0 besitzt. Gilt umgekehrt $a(x_0) = 0$ und $b(x_0) \neq 0$, so besitzt $F(x)$ eine **Polstelle** (Pol) in x_0 . Es gilt dann $F(x_0) = \infty$. Für das Verhalten im Unendlichen gilt:

$$\begin{aligned} m < n : \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} F(x) = 0 & \Rightarrow \text{Nullstelle der Ordnung } (n - m) \text{ im Unendlichen} \\ m > n : \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} F(x) = \pm\infty & \Rightarrow \text{Polstelle der Ordnung } (m - n) \text{ im Unendlichen} \end{aligned}$$

$F(x)$ heißt **reelle Funktion**, wenn

$$F(x) \in \mathbb{R} \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \tag{A.28}$$

gilt, was bei rationalen Funktionen äquivalent zu reellen Koeffizienten a_i, b_i ist. Bei rationalen **reellen** Funktionen gilt stets, dass Null- bzw. Polstellen stets als *konjugiert komplexe Paare* auftreten. Man bezeichnet eine Funktion als **positiv reell**, wenn zusätzlich gilt:

$$\operatorname{Re}(F(x)) \geq 0 \quad \text{für} \quad \operatorname{Re}(x) \geq 0. \tag{A.29}$$

A.3 Residuensatz

Ist eine Funktion $F(z)$ der komplexen Variablen z in einem Gebiet $\mathbf{G} \subseteq \mathbb{C}$ bis auf eine endliche Anzahl von singulären Punkten a_1, a_2, \dots, a_n analytisch² und \mathcal{C} eine geschlossene, doppel­punkt­freie, stückweise glatte Kurve, die die Singularitäten a_i umschließt und vollständig innerhalb von \mathbf{G} liegt, dann gilt für das Ringintegral

$$\oint_{\mathcal{C}} F(z) dz = 2\pi j \sum_{i=1}^n \operatorname{Res}(F(z), a_i). \tag{A.30}$$

Dabei ist zu beachten, dass die Kurve \mathcal{C} im mathematisch positiven Sinn (Gegenuhrzeigersinn) durchlaufen wird. Bei rationalen Funktionen $F(z)$ entsprechen die singulären Stellen den Polen der Funktion.

Als **Residuum** der Funktion $F(z)$ bezüglich des Punktes a wird der Koeffizient c_{-1} der Potenz $(z - a)^{-1}$ der Laurentreihenentwicklung

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n \tag{A.31}$$

² Eine Funktion $F(z)$ heißt analytisch in einer Umgebung von z_0 , wenn sie um diesen Punkt als Potenzreihe $F(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i (z - z_0)^i$ dargestellt werden kann. Das bedeutet u.a., dass die Funktion in dieser Umgebung beschränkt und beliebig oft stetig differenzierbar ist.

um $z = a$ bezeichnet. Man berechnet es für **einfache Pole** zu

$$\text{Res}(F(z), a) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a) \cdot F(z) \quad (\text{A.32})$$

und für **k-fache Pole** zu

$$\text{Res}(F(z), a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z-a)^k \cdot F(z)]. \quad (\text{A.33})$$

Beispiel A.1: Berechnung Ringintegral

Die Funktion

$$F(z) = \frac{2z^2 + 1}{(z-1)(z-2)^2} \quad (\text{A.34})$$

soll im mathematisch positiven Sinn längs den Kurven C_1, C_2 und C_3 (Kreise mit $|z| = r_i, i = 1, 2, 3$) integriert werden (Bild A.2).

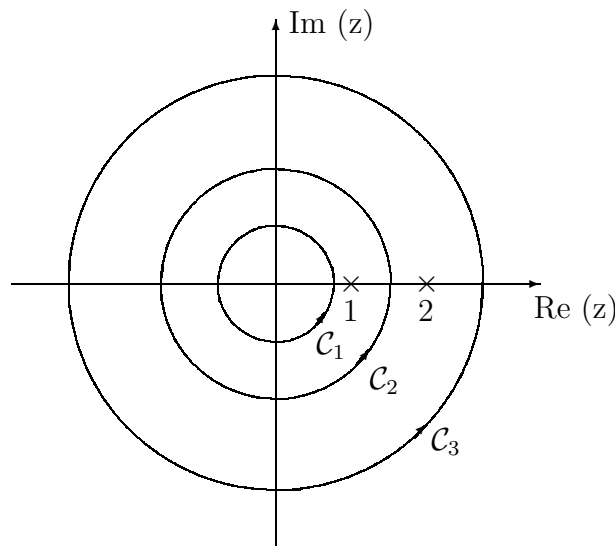


Bild A.2: Berechnung des Ringintegrals für verschiedene geschlossene Kurven.

Die Funktion $F(z)$ hat einen einfachen Pol bei $z = 1$ und einen doppelten Pol bei $z = 2$.

Wir berechnen zunächst die Residuen mit Hilfe von Gleichungen (A.32) und (A.33):

$$\text{Res}(F(z); 1) = (z-1) \cdot F(z) \Big|_{z=1} = \frac{2z^2 + 1}{(z-2)^2} \Big|_{z=1} = 3$$

$$\text{Res}(F(z); 2) = \frac{d}{dz} [(z-2)^2 F(z)] \Big|_{z=2} = \frac{(z-1)4z - (2z^2 + 1)}{(z-1)^2} \Big|_{z=2} = -1.$$

Mit Hilfe des Residuensatzes (A.30) erhalten wir für die Integrale:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1(0 < r < 1) : \oint_{\mathcal{C}_1} F(z) dz &= 0 \\ \mathcal{C}_2(1 < r < 2) : \oint_{\mathcal{C}_2} F(z) dz &= 2\pi j \cdot \text{Res}(F(z); 1) = 2\pi j \cdot 3 \\ \mathcal{C}_3(2 < r < \infty) : \oint_{\mathcal{C}_3} F(z) dz &= 2\pi j \cdot (\text{Res}(F(z); 1) + \text{Res}(F(z); 2)) \\ &= 2\pi j \cdot (3 - 1) = 2\pi j \cdot 2. \end{aligned}$$

A.4 Partialbruchzerlegung

Jede *echt* gebrochen rationale Funktion (Zählergrad kleiner Nennergrad)

$$F(x) = \frac{b(x)}{a(x)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i x^i}{\sum_{i=0}^n a_i x^i} = \frac{b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m}{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}, \quad m < n \quad (\text{A.35})$$

lässt sich als Summe von Partialbrüchen in der Form

$$F(x) = \sum_i \frac{R_i}{x - \alpha_i} + \sum_i \sum_{l=1}^{k_i} \frac{\tilde{R}_{i,l}}{(x - \tilde{\alpha}_i)^l} \quad (\text{A.36})$$

darstellen, wobei $\alpha_i \in \mathbb{C}$ einfache Pole von $F(x)$ und $\tilde{\alpha}_i \in \mathbb{C}$ Pole mit der Vielfachheit k_i darstellen. Die Koeffizienten $R_i, \tilde{R}_{i,l} \in \mathbb{C}$ lassen sich als Residuen über die Beziehungen

$$R_i = (x - \alpha_i) \cdot F(x) \Big|_{x=\alpha_i} \quad (\text{A.37})$$

$$\tilde{R}_{i,l} = \frac{1}{(k_i - l)!} \cdot \frac{d^{k_i-l}}{dx^{k_i-l}} [(x - \tilde{\alpha}_i)^{k_i} \cdot F(x)] \Big|_{x=\tilde{\alpha}_i} \quad (\text{A.38})$$

berechnen, was aus Beziehungen (A.32) und (A.33) folgt.

Eine andere Methode zur Koeffizientenberechnung besteht darin, Gleichung (A.36) auf den Hauptnenner $a(x)$ zu bringen und einen Koeffizientenvergleich mit dem Zählerpolynom $b(x)$ durchzuführen. Dies führt auf ein lineares Gleichungssystem, dessen Lösung die gesuchten Koeffizienten ergibt.

Sind alle Koeffizienten a_i, b_i von $F(x)$ reell, treten nur reelle Pole oder konjugiert komplexe Polpaare α, α^* mit konjugiert komplexen Koeffizienten R, R^* auf. Diese lassen sich über

$$\frac{R}{x - \alpha} + \frac{R^*}{x - \alpha^*} = \frac{px + q}{x^2 + \beta x + \gamma}, \quad R, \alpha \in \mathbb{C}, \quad p, q, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \quad (\text{A.39})$$

in eine rein reelle Darstellung bringen. Man kann daher auch den rein reellen Partialbruchansatz

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \sum_i \frac{R_i}{x - \alpha_i} + \sum_i \sum_{l=1}^{k_i} \frac{\tilde{R}_{i,l}}{(x - \tilde{\alpha}_i)^l} \\
 &= \sum_i \frac{p_i x + q_i}{x^2 + \beta_i x + \gamma_i} + \sum_i \sum_{l=1}^{\tilde{k}_i} \frac{\tilde{p}_{i,l} x + \tilde{q}_{i,l}}{(x^2 + \tilde{\beta}_i x + \tilde{\gamma}_i)^l}
 \end{aligned} \tag{A.40}$$

durchführen, wobei dann $\alpha_i, \tilde{\alpha}_i, R_i, \tilde{r}_{i,l} \in \mathbb{R}$ gilt. In diesem Fall ist nur die Methode über den Koeffizientenvergleich zur Koeffizientenberechnung geeignet.

Zur Partialbruchzerlegung einer konkret gegebenen Funktion $F(x)$ bietet sich folgende Vorgehensweise an:

- Überprüfen, ob es sich um eine *echt* gebrochen rationale Funktion mit Zählergrad kleiner Nennergrad handelt, ansonsten Abspaltung des ganzrationalen Anteils mittels Polynomdivision
- Bestimmung der Pole α_i und deren Vielfachheiten k_i der Funktion $F(x)$ über die Nullstellen des Nennerpolynoms $a(x)$.
- Ansatz der Partialbruchsumme gemäß Gleichung (A.36) bzw. (A.40)
- Bestimmung der Koeffizienten der Partialbruchsumme entweder
 - über die Formeln (A.37) und (A.38) oder
 - über Koeffizientenvergleich der auf den Hauptnenner gebrachten Partialbruchsumme
- Zur Kontrolle des Ergebnisses kann man die Partialbrüche wieder auf den Hauptnenner bringen und mit der ursprünglichen Funktion vergleichen.

Beispiel A.2: Partialbruchzerlegung

Die Funktion $F(x) = \frac{b(x)}{a(x)} = \frac{4x}{x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1}$ soll in Partialbruchform dargestellt werden:

- Zählergrad kleiner Nennergrad, d.h. keine Polynomdivision nötig
- Bestimmung der Pole von $F(x)$, d.h. der Nullstellen von $a(x)$:

$$a(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2(x + j)(x - j) = (x + 1)^2(x^2 + 1)$$

\Rightarrow

$F(x)$ besitzt einen doppelten Pol bei $x = -1$ und ein konjugiert komplexes Polpaar bei $x = \pm j$.

- Ansatz der Partialbruchsumme nach (A.36):

$$F(x) = \frac{4x}{(x+j)(x-j)(x+1)^2} = \frac{R_1}{x+j} + \frac{R_2}{x-j} + \frac{R_{11}}{x+1} + \frac{R_{12}}{(x+1)^2} \quad (\text{A.41})$$

- Berechnung der Koeffizienten

- über Formel (A.37) bzw. (A.38):

$$R_1 = (x+j) \cdot F(x) \Big|_{x=-j} = \frac{4x}{(x-j)(x+1)^2} \Big|_{x=-j} = \frac{-4j}{-2j(1-j)^2} = j$$

$$R_2 = R_1^* = -j$$

$$R_{11} = \frac{d}{dx} [(x+1)^2 \cdot F(x)] \Big|_{x=-1} = \frac{d}{dx} \frac{4x}{x^2+1} \Big|_{x=-1} = \frac{(x^2+1)4 - 4x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} \Big|_{x=-1} = 0$$

$$R_{12} = (x+1)^2 \cdot F(x) \Big|_{x=-1} = \frac{4x}{x^2+1} \Big|_{x=-1} = \frac{-4}{2} = -2$$

Die Formel (A.37) zur Koeffizientenberechnung bei einfachem Pol, die direkt der Residuenformel (A.32) entspricht, lässt sich hier wie folgt erläutern:

$$R_1 = (x+j) \cdot F(x) \Big|_{x=-j} = R_1 + R_2 \frac{x+j}{x-j} + R_{11} \frac{x+j}{x+1} + R_{12} \frac{x+j}{(x+1)^2} \Big|_{x=-j} = R_1$$

Entsprechendes gilt für die Formel (A.38) für mehrfache Pole:

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{d}{dx} [(x+1)^2 \cdot F(x)] \Big|_{x=-1} \\ &= \frac{d}{dx} \left[R_1 \frac{(x+1)^2}{x+j} + R_2 \frac{(x+1)^2}{x-j} + R_{11}(x+1) + R_{12} \right] \Big|_{x=-1} \\ &= R_1 \frac{2(x+1)(x+j) - (x+1)^2}{(x+j)^2} + R_2 \frac{2(x+1)(x-j) - (x+1)^2}{(x-j)^2} + R_{11} \Big|_{x=-1} = R_{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{12} &= (x+1)^2 \cdot F(x) \Big|_{x=-1} \\ &= R_1 \frac{(x+1)^2}{x+j} + R_2 \frac{(x+1)^2}{x-j} + R_{11}(x+1) + R_{12} \Big|_{x=-1} = R_{12} \end{aligned}$$

- über Koeffizientenvergleich:

Partialbruchansatz (rechten Teil von (A.41)) auf den Hauptnenner bringen und dem Zählerpolynom $b(x)$ gleichsetzen:

$$\begin{aligned} R_1(x-j)(x+1)^2 + R_2(x+j)(x+1)^2 + R_{11}(x^2+1)(x+1) + R_{12}(x^2+1) &= \\ (R_1 + R_2 + R_{11}) \cdot x^3 + (R_1(2-j) + R_2(2+j) + R_{11} + R_{12}) \cdot x^2 + & \quad (\text{A.42}) \\ (R_1(1-2j) + R_2(1+2j) + R_{11}) \cdot x + (-r_1j + r_2j + R_{11} + R_{12}) &\stackrel{!}{=} b(x) = 4x \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich liefert das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x^0 &: & -j \cdot R_1 & + & j \cdot R_2 & + & R_{11} & + & R_{12} & = & 0 \\ x^1 &: & (1 - 2j) \cdot R_1 & + & (1 + 2j) \cdot R_2 & + & R_{11} & + & & = & 4 \\ x^2 &: & (2 - j) \cdot R_1 & + & (2 + j) \cdot R_2 & + & R_{11} & + & R_{12} & = & 0 \\ x^3 &: & R_1 & + & R_2 & + & R_{11} & + & & = & 0 \end{aligned}$$

Die Lösung (z.B. über den Gaußschen Algorithmus) liefert die gesuchten Koeffizienten:

$$R_1 = j, \quad R_2 = -j, \quad R_{11} = 0, \quad R_{12} = -2.$$

Häufig ist das Ausmultiplizieren von (A.42), sowie das Aufstellen und Lösen des Gleichungssystems nicht nötig und das Einsetzen von geeigneten Werten in die Gleichung führt schneller und einfacher zum Ziel. Besonders geeignet zum Einsetzen sind die Polstellen $x = a_1$, da dadurch Summanden zu null werden:

$$\begin{aligned} x = -1 &: & R_{12}((-1)^2 + 1) & = & 4(-1) & \Rightarrow & R_{12} & = & -2 \\ x = j &: & R_2(j + j)(j + 1)^2 & = & 4j & \Rightarrow & R_2 & = & -j \\ x = -j &: & R_1(-j - j)(-j + 1)^2 & = & 4(-j) & \Rightarrow & R_1 & = & j \\ x = 0 &: & R_1(-j) + R_2 j + R_{11} + R_{12} & = & 0 & \Rightarrow & R_{11} & = & 0. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Partialbruchzerlegung von $F(x)$ zu:

$$F(x) = \frac{4x}{x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1} = \frac{j}{x + j} - \frac{j}{x - j} - \frac{2}{(x + 1)^2}.$$

Alternativ kann anstelle von (A.41) der reelle Partialbruchansatz nach (A.36) gewählt werden:

$$F(x) = \frac{4x}{x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1} = \frac{p_1 x + q_1}{x^2 + 1} + \frac{R_{11}}{x + 1} + \frac{R_{12}}{(x + 1)^2}. \quad (\text{A.43})$$

Die auf den Hauptnenner gebrachte Partialbruchsumme liefert für die Koeffizienten die Bestimmungsgleichung

$$(p_1 x + q_1)(x + 1)^2 + R_{11}(x^2 + 1)(x + 1) + R_{12}(x^2 + 1) \stackrel{!}{=} 4x,$$

die uns durch Einsetzen geeigneter Werte die gesuchten Koeffizienten liefert:

$$\begin{aligned} x = -1 & & R_{12}((-1)^2 + 1) & = & -4 & \Rightarrow & R_{12} & = & -2 \\ x = j & & (p_1 j + q_1)(j + 1)^2 & = & 4j & \Rightarrow & q_1 & = & 2, \quad p_1 = 0 \\ x = 0 & & q_1 + R_{11} + R_{12} & = & 0 & \Rightarrow & R_{11} & = & 0. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich als Lösung die Partialbruchzerlegung:

$$F(x) = \frac{4x}{x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1} = \frac{2}{x^2 + 1} - \frac{2}{(x + 1)^2}.$$

A.5 Laplace–Transformation

Ein mathematisches Standardwerkzeug zur Untersuchung der Eigenschaften linearer dynamischer Systeme ist in der Regelungstechnik die Laplace–Transformation. Sie stellt beispielsweise die Grundlage für die Algebraisierung linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten dar. Die zum Einsatz der Laplace–Transformation notwendigen Voraussetzungen werden bei regelungstechnischen Aufgaben von den Differentialgleichungen in der Regel erfüllt. Die Laplace–Transformation ist eine *Integraltransformation*, die einer großen Klasse von Originalfunktionen $f(t)$ umkehrbar eindeutig eine Bildfunktion $F(s)$ zuordnet. Dabei werden in der Regelungstechnik nur Zeitfunktionen betrachtet, die für $t < 0$ verschwinden. Für solche, so genannte kausale Zeitfunktionen $f(t)$, wird die *Laplace-Transformierte* $F(s)$ durch das Laplace–Integral

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (\text{A.44})$$

definiert, wobei im Argument der *Laplace-Transformierten* $F(s)$ die komplexe Variable $s = \sigma + j\omega$ auftritt.

Die Laplace–Transformation, die durch (A.44) festgelegt ist, wird *rechtsseitige Laplace–Transformation* genannt, da sich die Integration für kausale Zeitfunktionen von 0 bis ∞ erstreckt. Im Zusammenhang mit der Laplace–Transformation spricht man bei $f(t)$ von der Darstellung der Funktion im *Zeitbereich* bzw. Originalbereich und bei $F(s)$ von der Darstellung im Bildbereich. Um die Zuordnung zwischen Bildfunktion und Originalfunktion zu kennzeichnen, wird die Operatorschreibweise

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \quad (\text{A.45})$$

oder das Korrespondenzzeichen $\bullet\text{---}\circ$ in folgender Weise

$$F(s) \bullet\text{---}\circ f(t) \quad (\text{A.46})$$

verwendet.

Die Laplace–Transformierte $F(s)$ ist eine äquivalente Beschreibung der Zeitfunktion $f(t)$, d.h. der Funktion $f(t)$ im Zeitbereich ist eindeutig eine Funktion $F(s)$ im Frequenzbereich zugeordnet und umgekehrt.

Für die Anwendung der Laplace–Transformation muß sichergestellt sein, daß das Integral in Gl. (A.44) konvergiert. Dies ist nur dann gegeben, wenn der Realteil der komplexen Variablen s hinreichend groß gewählt ist. Der kleinste Wert von $\sigma = \text{Re}\{s\}$, für den das Laplace–Integral konvergiert, wird *Konvergenzabszisse* genannt und mit σ_0 bezeichnet. Das Laplace–Integral existiert somit nur in einem Teil der komplexen s –Ebene, der sogenannten Konvergenzhalbebene (vgl. Bild A.3).

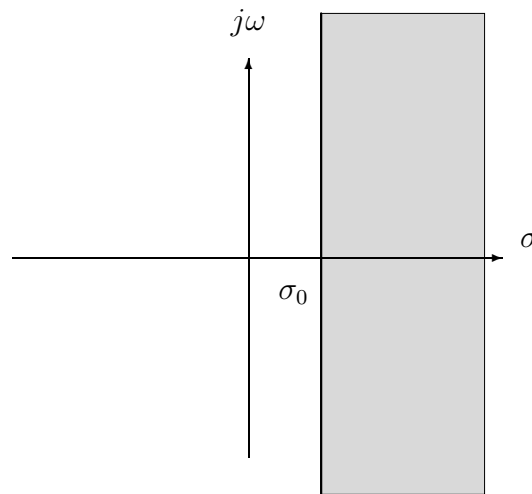


Bild A.3: Konvergenzhalbebene des Laplace-Integrals

Die Laplacerücktransformation oder inverse Laplace-Transformation zur Gewinnung der Originalfunktion $f(t)$ aus der Bildfunktion $F(s)$ lautet:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \quad (\text{A.47})$$

wobei die Größe c so gewählt werden muß, daß der Integrationsweg in der Konvergenzhalbebene längs einer Parallelen zur imaginären Achse im Abstand c verläuft, d.h. $c \geq \sigma_0$ muß erfüllt sein.

A.5.1 Eigenschaften und Tabellen der Laplace-Transformation

In diesem Abschnitt sind Eigenschaften der Laplace-Transformation, die für regelungstechnische Anwendungen von Interesse sind, zusammengestellt. Einen Überblick über die wesentlichen Eigenschaften gibt die Tabelle A.1. Hierbei wird vorausgesetzt, daß für $f_i(t)$, $i = 1, 2$ die Laplace-Transformierten $F_i(s)$, $i = 1, 2$ mit $\text{Re } s > \sigma_{0_i}$ existiert.

Nr.		Zeitfunktion	Transformierte	Voraussetzungen
1	Definition	$f(t) \cdot 1(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) \cdot e^{st} ds$	$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$	$c \geq \sigma_0$ ¹
2	Linearität	$k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)$	$k_1 F_1(s) + k_2 F_2(s)$	$k_1, k_2 = \text{const.}$
3	Rechtsverschiebungssatz	$f(t - a) \cdot 1(t - a)$	$e^{-as} \cdot F(s)$	$a > 0$, reell
4	Ähnlichkeitssatz	$f(at)$	$\frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right)$	$a > 0$, reell
5	Dämpfungssatz	$e^{-at} \cdot f(t)$	$F(s + a)$	a beliebig
6	Differentiationssatz	$f^{(n)}(t)$	$s^n \cdot F(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^i \cdot f^{(n-1-i)}(+0)$	$f(t)$ sei $(n - 1)$ -mal stetig differenzierbar
7	Integrationsatz	$\int_0^t \int_0^{\tau_{n-1}} \cdots \int_0^{\tau_1} f(\tau) d\tau d\tau_1 \cdots d\tau_{n-1}$	$\frac{1}{s^n} \cdot F(s)$	–
8	Faltungssatz	$\int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau$	$F_1(s) \cdot F_2(s)$	$\text{Re } s > \max_i \sigma_{0_i}$ $i = 1, 2$
9	Grenzwertsätze	Anfangswertsatz: $\lim_{t \rightarrow +0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s)$ Endwertsatz: $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s)$		Existenz der Grenzwerte

Tabelle A.1: Definition, Eigenschaften der Laplace–Transformation

Mit Hilfe einiger weniger dieser Eigenschaften lassen sich gewöhnliche lineare, zeitinvariante Differentialgleichungen in geschlossener Form *algebraisieren*, d. h. die die Dynamik eines Systems beschreibenden Differentialgleichungen werden damit in einfacher und geschlossener Form in sogenannte **Übertragungsfunktionen** überführt. Im folgenden werden einige dieser wichtigen Eigenschaften abgeleitet:

³ Konvergenzabszisse

a) **Ableitung des Differentiationsatzes**

$$\mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} = \int_0^{\infty} \dot{f}(t)e^{-st} dt \quad (\text{A.48})$$

partielle Integration mit $u = e^{-st}$ und $\dot{v} = \dot{f}(t)$ liefert:

$$dv = \dot{f}(t)dt \Rightarrow du = -se^{-st}dt \quad ; v = f(t)$$

$$\mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} = [e^{-st}f(t)]_{t=0}^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t)(-se^{-st})dt$$

$$\text{mit } \operatorname{Re}\{s\} > 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} = 0 \quad ; e^{-st}|_{t=0} = 1$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} &= \int_0^{\infty} sf(t)e^{-st}dt - f(0) = s \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt - f(0) \\ &= sF(s) - f(0) \end{aligned}$$

b) **Korrespondenz** $1(t) \circ \bullet \frac{1}{s}$

$$\mathcal{L}\{1(t)\} = \int_0^{\infty} 1(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} e^{-st}dt$$

$$\left[-\frac{1}{s}e^{-st} \right]_{t=0}^{\infty} = \left[0 - \left(-\frac{1}{s} \cdot 1 \right) \right] = \frac{1}{s}$$

c) **Korrespondenz** $1(t)e^{-at} \circ \bullet \frac{1}{s+a}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{1(t)e^{-at}\} &= \int_0^{\infty} 1(t)e^{-at}e^{-st}dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+s)t}dt = \left[\frac{-1}{s+a}e^{-(s+a)t} \right]_{t=0}^{\infty} \\ &= 0 - \left(\frac{-1}{s+a} \cdot 1 \right) = \frac{1}{s+a} \end{aligned}$$

d) **Korrespondenz** $\delta(t - T) \circ \bullet e^{-sT}$

$$\mathcal{L}\{\delta(t - T)\} = \int_0^{\infty} \delta(t - T)e^{-st} dt$$

mit $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0)f(t)dt = f(t_0)$

$$\mathcal{L}\{\delta(t - T)\} = e^{-sT}$$

und für $T = 0 \Rightarrow \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$

e) **Grenzwertsatz**

Beispiel: $T\dot{y} + y(t) = Ku(t) \Rightarrow [Ts + 1]Y(s) = KU(s)$

$$Y(s) = \frac{K}{1 + sT} U(s)$$

mit $u(t) = 1(t) \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s}$ und

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{K}{1 + sT} \frac{1}{s}$$

$$|h(t)|_{t \rightarrow \infty} = s H(s)|_{s=0} = K$$

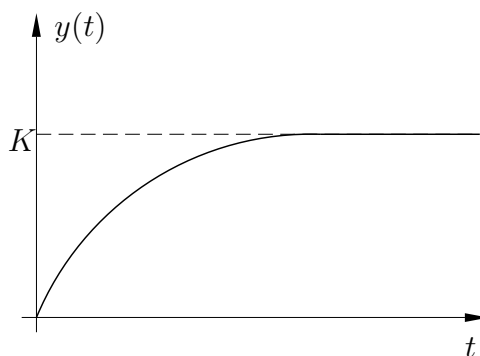


Bild A.4: Zur Erläuterung des Grenzwertsatzes

Die Bedeutung der Laplace-Transformation liegt ferner ganz wesentlich darin, daß die Transformation von Zeitfunktionen in den Bildbereich und dann auch wieder zurück mittels Tabellen erfolgen kann. In Tabelle A.2 sind wesentliche, in der Regelungstechnik häufig benutzte Korrespondenzen zusammengestellt.

Nr.	Zeitfunktion	Transformierte
1	$1(t)$	$\frac{1}{s}$
2	$t^n \cdot 1(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
3	$e^{-at} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s+a}$
4	$\frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{1+sT}$
5	$\frac{1}{a} (1 - e^{-at}) \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s(s+a)}$
6	$(1 - e^{-t/T}) \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s(1+sT)}$
7	$\frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt}) \cdot 1(t)$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
8	$\frac{e^{-t/T_1} - e^{-t/T_2}}{T_1 - T_2} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$
9	$t \cdot e^{-at} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
10	$\frac{1}{T^2} \cdot t \cdot e^{-t/T} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{(1+sT)^2}$
11	$\left(\frac{a}{b} + \frac{b-a}{b} \cdot e^{-bt}\right) \cdot 1(t)$	$\frac{(s+a)}{s(s+b)}$
12	$\left(1 + \frac{T-T_1}{T_1} e^{-t/T_1}\right) \cdot 1(t)$	$\frac{(1+sT)}{s(1+sT_1)}$
13	$\frac{1}{a^2} (e^{-at} - 1 + a \cdot t) \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
14	$(T \cdot e^{-t/T} + t - T) \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s^2(1+sT)}$
15	$\frac{1}{a^2} [1 - (at+1)e^{-at}] \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s(s+a)^2}$

Tabelle A.2: Korrespondenzen zur Laplace-Transformation

Nr.	Zeitfunktion	Transformierte
16	$\left(1 - \frac{T+t}{T}e^{-t/T}\right) \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s(1+sT)^2}$
17	$\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{a-b} \left[\frac{1}{a}e^{-at} - \frac{1}{b}e^{-bt}\right]\right) \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
18	$\left(1 + \frac{T_1 \cdot e^{-t/T_1} - T_2 \cdot e^{-t/T_2}}{T_2 - T_1}\right) \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s(1+sT_1)(1+sT_2)}$
19	$\frac{(c-b)e^{-at} + (a-c)e^{-bt} + (b-a)e^{-ct}}{(a-b)(a-c)(c-b)} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$
20	$[(T_1 - T_2)(T_1 - T_3)(T_2 - T_3)]^{-1} \cdot [T_1(T_2 - T_3)e^{-t/T_1} + T_2(T_3 - T_1)e^{-t/T_2} + T_3(T_1 - T_2)e^{-t/T_3}] \cdot 1(t)$	$\frac{1}{(1+sT_1)(1+sT_2)(1+sT_3)}$
21	$\frac{1}{\omega_0} \cdot \sin \omega_0 t \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s^2 + \omega_0^2}$
22	$\cos \omega_0 t \cdot 1(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$
23	$\frac{1}{2\omega_0} \cdot t \cdot \sin \omega_0 t \cdot 1(t)$	$\frac{s}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$
24	$t \cdot \cos \omega_0 t \cdot 1(t)$	$\frac{s^2 - \omega_0^2}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$
25	$\sinh \omega t \cdot 1(t)$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
26	$\cosh \omega t \cdot 1(t)$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
27	$\frac{1}{\sqrt{1-D^2}\omega_0} e^{-D\omega_0 t} \sin(\sqrt{1-D^2} \omega_0 t) \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2}$

Tabelle A.2: Fortsetzung

28	$e^{-D\omega_0 t} \sin(\sqrt{1-D^2} \omega_0 t) \cdot 1(t)$	$\frac{\sqrt{1-D^2} \omega_0}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2}$
29	$e^{-D\omega_0 t} \cos(\sqrt{1-D^2} \omega_0 t) \cdot 1(t)$	$\frac{s + D\omega_0}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2}$
30	$e^{-\delta t} \sin \omega_e t \cdot 1(t)$	$\frac{\omega_e}{(s + \delta)^2 + \omega_e^2}, \quad \omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ $= \sqrt{1 - D^2} \omega_0$
31	$e^{-\delta t} \cos \omega_e t \cdot 1(t)$	$\frac{s + \delta}{(s + \delta)^2 + \omega_e^2}, \quad \omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ $= \sqrt{1 - D^2} \omega_0$
32	$e^{-\delta t} \sinh \omega_e t \cdot 1(t)$	$\frac{\omega_e}{(s + \delta)^2 - \omega_e^2}, \quad \omega_e = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$
33	$e^{-\delta t} \cosh \omega_e t \cdot 1(t)$	$\frac{s + \delta}{(s + \delta)^2 - \omega_e^2}, \quad \omega_e = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$
Korrespondenzen für verallgemeinerte Funktionen		
34	$\delta(t)$	1
35	$\delta(t - T)$	e^{-sT}
36	$\delta^{(n)}(t)$	s^n

Tabelle A.2: Fortsetzung

Partialbruchentwicklung

Die Tabelle A.2 enthält die wichtigsten Korrespondenzen zur Laplace-Transformation. Bei Funktionen $F(s)$, die nicht in der Tabelle A.2 enthalten sind, ist $F(s)$ durch eine Partialbruchentwicklung in eine Summe einfacher Funktionen von s

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \dots + F_n(s) \quad (\text{A.49})$$

zu zerlegen, deren inverse Laplace-Transformierte in Tabelle A.2 enthalten sind:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\} + \dots + \mathcal{L}^{-1}\{F_n(s)\} \\ &= f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t) . \end{aligned}$$

Bei regelungstechnischen Problemen tritt $F(s)$ sehr häufig in der Form einer gebrochen rationalen Funktion auf:

$$F(s) = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_{m-1}s^{m-1} + b_ms^m}{a_0 + a_1s + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + a_ns^n} = \frac{Z(s)}{N(s)} \quad , \quad (\text{A.50})$$

wobei $Z(s)$ und $N(s)$ das Zähler- bzw. Nennerpolynom darstellen.

Eine gebrochen rationale Funktion $F(s)$ gemäß Gl. (A.50) läßt sich durch Anwendung der *Partialbruchzerlegung* in einfachere Funktionen, wie in Gl.(A.49) angedeutet, zerlegen. Dazu muß das Nennerpolynom $N(s)$ faktorisiert werden, so daß man die Form

$$F(s) = \frac{Z(s)}{(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n)} \quad (\text{A.51})$$

erhält. Für ein Nennerpolynom n -ter Ordnung bekommt man dann n Wurzeln oder Nullstellen $s = s_1, s_2, \dots, s_n$. Diese Nullstellen von $N(s)$ sind die *Pole*, $p_i, i = 1, 2, \dots, n$ von $F(s)$. Das Vorgehen bei der Partialbruchzerlegung ist abhängig von der Art der Pole.

Für **einfache Pole** wird die Partialbruchentwicklung bestimmt nach (vgl. Gl. (A.36, A.37)):

$$F(s) = \frac{Z(s)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{s - p_i} \quad \left. \vphantom{\frac{Z(s)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}} \right\} \quad (\text{A.52})$$

mit $R_i = (s - p_i) F(s)|_{s=p_i}$

Für die Partialbruchentwicklung eines **mehrfachen Pols** (hier k -facher Pol) gilt (vgl. Gl. (A.36) und (A.38)):

$$F(s) = \frac{Z(s)}{(s - p_i)^k} = \frac{R_{i,1}}{s - p_i} + \frac{R_{i,2}}{(s - p_i)^2} + \dots + \frac{R_{i,k}}{(s - p_i)^k} \quad \left. \vphantom{\frac{Z(s)}{(s - p_i)^k}} \right\} \quad (\text{A.53})$$

$$= \sum_{j=1}^k \frac{R_{i,j}}{(s - p_i)^j}$$

mit $R_{i,j} = \frac{1}{(k - j)!} \frac{d^{k-j}}{ds^{(k-j)}} \left[(s - p_i)^k F(s) \right]_{s=p_i}$

Beispiel A.3:

$$F(s) = \frac{Z(s)}{(s - p_i)^2} = \frac{R_{i,1}}{s - p_i} + \frac{R_{i,2}}{(s - p_i)^2}$$

$$R_{i,1} = \left. \frac{dZ(s)}{ds} \right|_{s=p_i} ; R_{i,2} = Z(s)|_{s=p_i}$$

Beispiel A.4:

$$F(s) = \frac{1}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2} = \frac{1}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{R_{1,1}}{s+1} + \frac{R_{1,2}}{(s+1)^2} + \frac{R_2}{s+2};$$

$$R_2 = \frac{1}{(s+1)^2} \Big|_{s=-2} = 1 \quad ,$$

$$R_{1,2} = \frac{1}{s+2} \Big|_{s=-1} = 1 \quad ,$$

$$R_{1,1} = \frac{d}{ds} \frac{1}{s+2} \Big|_{s=-1} = -\frac{1}{(s+2)^2} \Big|_{s=-1} = -1 \quad .$$

Stichwortverzeichnis

- Anfangswertsatz, 120
- Anregelzeit, 100
- Anstiegszeit, 100
- Antriebsregelstrecke, 75
- Antriebsregelung, 57
- Ausgangsgröße, 24
- Ausregelzeit, 100

- Bildbereich, 62, 118
- Bildfunktion, 62, 118
- Blockschaltbild, 20
- Blockschaltbildalgebra, 21, 63, 64
 - Beispiel, 66, 67
 - Regeln, 65

- charakteristische Gleichung, 91, 93
 - Regelkreis, 96
- charakteristisches Polynom, 93, 96

- D–Glieder, 76
 - Übertragungsfunktion, 76
- D–System, 76
- Dämpfungsgrad, 49, 50
- Dampfturbinenregelung, 23
- Dauerschwingungen, 105, 106
- Differentialgleichung
 - partiell, 53
- Differenzgrad, 70
- Dirac’sche Deltafunktion, 35
- Dirac’scher Deltaimpuls, 36
 - Ausblendeigenschaft, 36
- Dirac–Impuls, 36

- Eigenbewegung, 70, 83, 96
- Eigenfrequenz, 49
- Ein–/Ausgangsverhalten, 47
- Einganggröße, 24
 - sinusförmig, 62
- Einheitssprungfunktion, 35
- Empfindlichkeitsfunktion, 86
 - komplementäre, 86
- Endwertsatz, 120
- Energie
 - kinetisch, 49
 - potentiell, 49
- Erregung
 - harmonisch, 38
- Euler–Beziehung, 38, 110
- Eulersche Gleichung, 110

- Faltungintegral, 39, 40
- Faltungssatz
 - Anwendung, 64
- feedback control, 26
- feedforward control, 26
- Festwertregelung, 25
- Fliehkraftregelung, 12
- Fliehkraftregler, 13
- Förderband, 53
- Folgeregelkreis, 37
- Folgeregelung, 25
- Frequenzkennlinienverfahren, 71
- Führungsübertragungsfunktion, 99
- Führungsgröße, 19, 24
- Führungsübertragungsfunktion, 84–86
- Führungsverhalten, 85, 86
- Füllstandsregelung, 56
- Fundamentalsatz der Algebra, 111
- Funktion
 - analytisch, 112
 - echt gebrochen rationale, 111, 114
 - ganze rationale, 111
 - komplexe, 112
 - komplexe, Laurentreihe, 112
 - komplexe, Residuum, 112
 - komplexe, Ringintegral, 112, 113
 - positiv reell, 112
 - rationale, 111
 - rationale, Nullstelle, 112

- rationale, Nullstelle im Unendlichen, 112
- rationale, Pol, 112
- rationale, Polstelle, 112
- rationale, Polstelle im Unendlichen, 112
- reelle, 112
- unecht gebrochen rationale, 111
- Fuzzy-Regelung, 15, 28
- Fuzzy-Regler, 15
- Gaußsche Zahlenebene, 108
- Gewichtsfunktion, 36, 40
 - Zusammenhang mit Übertragungsf., 63, 91
- Grenzstabilität, 92
- Grenzwertsätze, 120
- Hurwitz-Kriterium, 93
- Hurwitz-Polynom, 93
- Hurwitzdeterminante, 94
- I-Glied, 56
- I-Regler, 56
- I-System, 75
 - Pol, 76
 - Sprungantwort, 76
- Impulsantwort, 36
- Impulsfunktion, 35
- Information, 18
- Instabilität, 92
- Integralkriterien, 101, 103
- Integrationszeitkonstante, 56
- Integrierbeiwert, 56
- Istwert, 19
- Kalman-Filter, 15
- Kennlinienfelder, 23
- komplexe Ebene, 108
- komplexe Zahlen, 108
 - Betrag und Phase, 109
 - Gaußsche Zahlenebene, 108
 - Polarkoordinaten, 109
 - Real- und Imaginärteil, 109
 - Zeiger, 108
 - kartesische Koordinaten, 108
- Konvergenzabszisse, 118
- Konvergenzhalbene, 118
- Kreisverstärkung, 88, 89
- Lageregelung, 75
- Laplace-Transformation, 118
 - Ähnlichkeitssatz, 120
 - Anfangswertsatz, 120
 - Anwendung, 63
 - Dämpfungssatz, 120
 - Differentiationsatz, 63, 120, 121
 - Endwertsatz, 120
 - Faltungssatz, 63, 120
 - Grenzwertsatz, 120, 122
 - Integrationsatz, 120
 - Rechtsverschiebungssatz, 120
 - inverse, 71, 119
- Laplace-Transformierte
 - inverse, 125
- Laplacetransformation
 - inverse, 105
- Linearisierung
 - analytisch, 31
 - graphisch, 31
- Matlab/Simulink, 27
- Mehrgrößenregelsystem, 15
- Modellbildung, 27
- Modellebene, 27
- Modellierung
 - experimentell, 34
- Nachlaufregelung, 25
- Nullstellen, 111
 - Ordnung, 111
 - Vielfachheit, 111
- Originalfunktion, 62, 118
- Parameterungenauigkeit, 96

- Partialbruchentwicklung, 125
 - einfacher Pol, 126
 - mehrfacher Pol, 126
- Partialbruchzerlegung, 114, 115, 126
 - Koeffizientenvergleich, 115
- PD–System, 77
 - Übertragungsfunktion, 77
- PI–Regler, 78
- PI–System, 77
 - Übertragungsfunktion, 78
- PID–Glied
 - Übertragungsfunktion, 79
- PID–Regelung, 13
- PID–Regler, 15, 28, 78
 - Einstellung nach Ziegler–Nichols, 104
 - Nachstellzeit, 104
 - Vorhaltezeit, 104
 - ohne Verzögerung, 104
 - Übertragungsfunktion, 79
- PID–System, 78
 - Blockschaltbild, 79
- Polynom, 111
 - Nullstelle, 111
 - Produktform, 111
 - Wurzel, 111
 - charakteristisches, 69
- Polynomdivision, 111
- Proportionalübertragungssystem, 51
- Prozeßebe, 27
- PT₁–Glied, 107
 - Differentialgleichung, 42, 72
 - Impulsantwort, 43
 - Sprungantwort, 43, 72
 - Übertragungsfunktion, 72
- PT₂–System
 - komplexe–Pole, 73
 - reelle Pole, 73
- PT_n–System, 75
- Rampenfunktion, 37
- RC–Glied, 44
 - Differentialgleichung, 44
 - Sprungantwort, 44
 - Übergangsfunktion, 45
- RC–Netzwerk, 48
- Regelabweichung, 24
 - Beschleunigungsfehler, 89
 - Geschwindigkeitsfehler, 89
 - Lagefehler, 89
 - bleibende, 87–89
 - bleibend, 100, 101
- Regeldifferenz, 24
- Regeleinrichtung, 24
- Regelfaktor
 - dynamisch, 86
- Regelfläche
 - ITEA–Kriterium, 103
 - betragslineare, 103
 - lineare, 103
 - quadratische, 103
 - quadratische und Stellaufwand, 103
 - verallgemeinerte quadratische, 103
 - zeitbeschwerte quadratische, 103
- Regelgüte, 89
- Regelgröße, 19, 24
- Regelkreis, 19, 26
 - geschlossen, 88
 - offen, 88
 - stationäres Verhalten, 86
 - Entwurf, 98
 - stabil, 99
- Regelstrecke, 19, 24, 27
- Regelung, 26
- Regelungsaufgabe, 27, 84
 - Lösung, 98
- Regelverhalten
 - Dynamik, 101
- Regler, 19
- Reglerparameter, 27
- Reglerstruktur, 27
- Residuensatz, 112, 114
- RL–System, 45
- Robustheit, 26, 89

- Routh-Kriterium, 94
 - Beispiel, 95
- Routh-Schema, 95
- Rückführdifferenz, 85
- Ruhelage
 - indifferent, 90
 - instabil, 90
 - stabil, 90
- s-Ebene, 118
- Schwinger
 - elektrisch, 49
 - mechanisch, 50
 - Sprungantwort, 50
 - Zustandsmodell, 50
- SHANNON, 18
- Signale, 18
- Signalflußplan, 20
- Simulation, 27
- Sollwert, 19
- Speicher
 - konzentriert, 41
- Sprungantwort, 35
- Sprungfunktion, 34
- Stabilität, 89, 90
 - BIBO, 90, 92, 93
 - asymptotisch, 90, 91
 - lineares System, 90
- Stabilitätskriterien, 93
- Stabilitätsprobleme, 26
- Stabilitätsrand, 106
- Stabilitätsreserve, 96
 - absolut, 97
 - relativ, 97
- Standardregelkreis
 - Blockschaltbild, 84
- Stellglied, 19
- Stellgröße, 19, 24
- Stellgrößenbeschränkung, 99
- Steuer- und Beobachtbarkeit, 14
- Steuereinrichtung, 26
- Steuerkette, 25, 26
- Steuerstrecke, 26
- Steuerung, 26
- Störübertragungsfunktion, 84, 85, 99
- Störgröße
 - aufschaltung, 26
 - regelung, 25
- Störgrößen, 19
- Störkompensation, 26
- Störungen, 24
- Störverhalten, 85, 86
- Strecke, 24
- Superpositionsgesetz, 30
- Superpositionsprinzip, 30
- System, 18
 - dynamisches, 18
 - Eigenbewegung, 70
 - Eigenverhalten, 70
 - grenzstabil, 91
 - mit Selbstausgleich, 51
 - ohne Ausgleich, 56
 - P, 51
 - PT_1 , 72
 - passiv, 48, 49
 - pneumatisch, 41, 46
 - rückwirkungsfrei, 47, 52
 - Ruhelage, 90
 - Totzeit, 70
 - Verstärkung, 35, 45, 51, 55, 69
 - zweiter Ordnung, 45
- Systemverstärkung, 35, 45, 51, 55, 69
- Taylorreihenentwicklung, 32
- Testsignale, 34
- Totzeit, 54
- Totzeitglied, 54, 107
- Totzeitsystem, 53
- Trennverstärker, 53
- Übergangsfunktion, 35
 - Methode, 107
- Übergangsverhalten, 100
- Überschwingweite

- maximal, 100
- Übertragungsfunktion, 63, 68
 - Partialbruchzerlegung, 91
 - Pol–Nullstellen–Bild, 70
 - Pol–Nullstellen–Form, 69
 - Pole und Nullstellen, 69
 - Polynomform, 69
 - transzendent, 70
 - offenes System, 84
- Übertragungsglied, 68
 - physikalisch nicht realisierbar, 68
 - rückwirkungsfrei, 21
- Übertragungsmodell, 41
- Übertragungssystem
 - nichtlinear, 21

- Vektordifferentialgleichung, 47
- Verhalten
 - statisch, 101
- Verstärkung, 33, 35, 45, 51, 55, 69

- Wurzelortskurvenmethode, 14

- Zeitbereich, 62, 118
- Ziegler und Nichols, 14
- Ziegler–Nichols
 - Reglereinstellwerte, 106
- Ziegler–Nichols–Verfahren
 - Methode der Übergangsfunktion, 105
 - Methode des Stabilitätsrandes, 105
- Zustandsmodell, 41, 47, 52
- Zustandsraumdarstellung, 14